Paradigma | Volumen 32 (2025) | Número 54 | p.9-34

Paradigma
Revista de Investigación Educativa

Artículo

Identificación de las dificultades en la comprensión de los números negativos por medio del modelo de Pirie y Kieren

Identifying difficulties in understanding negative numbers using the Pirie and Kieren model

[a,*]**Eduardo Adam Navas López**, [b]**Jonathan Andrés Cruz Miranda**

[a] eduardo.navas@ues.edu.sv. Universidad de El Salvador. https://orcid.org/0000-0003-3684-2966

[b] cm22135@ues.edu.sv. Universidad de El Salvador. https://orcid.org/0009-0006-2694-0182

Resumen

Se ha observado que los estudiantes de educación básica presentan dificultades recurrentes en la comprensión de los números enteros en diferentes países. Específicamente, el objetivo de este trabajo es identificar las dificultades en el aprendizaje de los números negativos que enfrenta un grupo de estudiantes de séptimo grado de una escuela pública de una zona rural del departamento de San Salvador, El Salvador, a partir del análisis de su nivel de comprensión de los números enteros. El enfoque es cualitativo con alcance exploratorio y diseño de investigación-acción. Se aplicó un examen a una muestra de 12 estudiantes seleccionados por conveniencia y luego se analizó en detalle su proceso de resolución. Los resultados muestran que los estudiantes presentan imágenes mentales incorrectas e inconsistentes, y en general un estancamiento en su nivel de comprensión. También presentan muchas de las dificultades conceptuales similares a las documentadas en la literatura sobre la comprensión de los números negativos. Además, se detectaron indicios de mentalidad fija en los estudiantes. Por ello, es necesario implementar estrategias educativas que mejoren la comprensión de los números enteros a través de la (re)construcción de imágenes mentales apropiadas, y que propicien una mentalidad de crecimiento.

Palabras clave: aritmética, formación de conceptos, conceptos erróneos, conceptos numéricos, séptimo grado

[*]Autor para correspondencia

https://doi.org/10.5377/paradigma.v32i54.21528

Recibido: 22 de junio de 2025 | Aceptado: 4 de noviembre de 2025

Disponible en línea: diciembre de 2025

Paradigma: Revista de Investigación Educativa | ISSN 1817-4221 | EISSN 2664-5033 |

Abstract

It has been observed that lower secondary students in various countries consistently struggle to understand integers. Specifically, the aim of this study is to identify the difficulties in learning negative numbers faced by a group of seventh-grade students from a public school in a rural area of the department of San Salvador, El Salvador, based on an analysis of their level of understanding of integers. The study follows a qualitative approach with an exploratory scope and an action research design. A test was administered to a convenience sample of 12 students, and their problem-solving processes were then analyzed in detail. The results show that students hold incorrect and inconsistent mental images and generally exhibit stagnation in their level of understanding. They also display many of the conceptual difficulties documented in the literature on the understanding of negative numbers. Furthermore, signs of a fixed mindset were detected among the students. Therefore, it is necessary to implement educational strategies that enhance the understanding of integers through the (re)construction of appropriate mental images and that foster a growth mindset.

Keywords: arithmetic, concept formation, misconceptions, number concepts, grade 7

Introducción

Según Fernández Carreira (2013), las dificultades de aprendizaje en matemáticas se manifiestan en la adquisición y el uso de habilidades fundamentales como la lectura, comprensión, expresión escrita y razonamiento matemático durante la etapa escolar, lo que puede llevar a un aprendizaje más lento y, en algunos casos, contribuir al fracaso escolar. Dentro de este espectro, Aponte Bello y Rivera Martínez (2017) señalan que los números negativos, por ser abstractos y difíciles de visualizar, confunden a los estudiantes más que los números positivos; y esta confusión, causada por esquemas cognitivos inadecuados, preocupa a los docentes debido a su impacto en el aprendizaje matemático posterior. Esta dificultad no es un fenómeno aislado, ya que se ha confirmado que estudiantes de diversos niveles, desde primer grado hasta la universidad, manifiestan problemas con los números negativos, ya sea por el uso inapropiado de reglas operativas o por una comprensión limitada de su significado (Bofferding y Weissman-Enzinger, 2017). Los estudiantes de secundaria, en particular, no son la excepción a esta problemática (Fuadiah et al., 2017; Medina Carruitero, 2014; Mena Ayala, 2021).

Para comprender la profundidad de este desafío, es revelador observar su dimensión histórica y pedagógica. No es de extrañar la confusión de los estudiantes, ya que, a lo largo de la historia, matemáticos que hoy consideramos de gran renombre rechazaron los números negativos, y su aceptación formal no ocurrió sino hasta el siglo XIX (Bruno, 2001). Mientras que los números naturales surgieron orgánicamente de la necesidad de contar, los negativos aparecieron como un constructo abstracto de la propia práctica matemática (Castillo Angulo, 2014; Medina Carruitero, 2014). A esta complejidad conceptual se suma un factor pedagógico: la enseñanza actual tiende a priorizar los resultados correctos sobre el análisis del proceso de pensamiento del estudiante (Medina Carruitero, 2014). Esta falta de atención al proceso impide identificar y abordar las concepciones erróneas.

Precisamente, para superar un enfoque centrado sólo en el resultado, es crucial analizar cómo los estudiantes abordan y resuelven las tareas matemáticas. Al detectar las dificultades específicas en sus procesos, los investigadores pueden identificar conceptos erróneos y estrategias ineficaces (Goldin, 2000; Bofferding y Weissman-Enzinger, 2017). Para este fin, existen diferentes marcos teóricos. Uno de ellos es el modelo de Glaeser (1981), que clasifica las dificultades u obstáculos históricos en la aceptación y comprensión de los números negativos en seis tipos, que se pueden enfocar en las dificultades que los estudiantes pueden enfrentar en el contexto educativo. Estos obstáculos son: (a) Falta de aptitud para manipular cantidades negativas; (b) Dificultad para dar sentido a cantidades negativas; (c) Dificultad para unificar la recta real; (d) Ambigüedad de los dos ceros; (e) Estancamiento en el estadio de las operaciones concretas; y (f) Deseo de un modelo didáctico unificado para la suma y la multiplicación de enteros. Este modelo sigue siendo pertinente, ya que, en una tesis doctoral asesorada por Guy Brousseau en España, se ha planteado que uno de los objetivos en la línea de investigación de las dificultades de aprendizaje relacionadas con los números negativos es "constatar si dichos obstáculos históricos [como a los que se refiere Glaeser (1981)] perviven en los alumnos actuales" (Cid Castro, 2016, p. 91).

Complementariamente, para observar no sólo qué obstáculos existen, sino cómo evoluciona dinámicamente la comprensión de un estudiante al enfrentarlos, se puede utilizar el modelo de Pirie y Kieren (1994). Este segundo modelo es una herramienta para observar cómo los estudiantes manifiestan sus ideas y llevan a cabo acciones, utilizando sus propias palabras para expresar las relaciones y conexiones que logran identificar. La articulación de ambos marcos teóricos permite, por tanto, un análisis más completo de las dificultades de aprendizaje.

Planteamiento del problema

En el séptimo grado, sección "C", del Centro Escolar Confederación Suiza, de una zona rural del municipio de San Salvador, El Salvador, se ha comprobado, durante la realización de las prácticas profesionales de uno de los autores, que los estudiantes tienen dificultades con las operaciones básicas (suma, resta, y multiplicación) de números enteros, como la aplicación de la conmutatividad, la precedencia de operadores, uso de paréntesis, la ley de signos y desplazamientos en la recta numérica.

A lo largo de las últimas décadas se ha documentado, en diferentes países, evidencia de que muchos alumnos transitan su educación escolar secundaria con ideas confusas sobre los números enteros (Bermeo Muñoz y Torres Daza, 2022; Bofferding y Wessman-Enzinger, 2017; Fuadiah et al., 2017), lo cual es un problema reconocido por profesores de secundaria y los primeros años universitarios (Maca Díaz y Patiño Giraldo, 2016; Medina Carruitero, 2014).

En El Salvador, la Prueba AVANZO, realizada anualmente para estudiantes de Segundo Año de Educación Media, evalúa habilidades y pretende mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje (Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología [MINEDUCYT], 2023). Los resultados de este examen estandarizado muestran entre los estudiantes que terminaron el bachillerato (secundaria) en 2023, un promedio nacional de 13.56 aciertos de 30 ítems en la sección de matemática, además, sólo el 49.19% de los estudiantes resolvieron adecuadamente los ítems que exploran aspectos conceptuales y procedimentales de rutina (Dirección Nacional de Evaluación Educativa [DNEE], 2023). Esto refleja una problemática de comprensión de conceptos bastante generalizada en el país, que subraya la necesidad de identificar las dificultades en el aprendizaje de conceptos fundamentales, especialmente en operaciones básicas.

Concretamente, el objetivo de este estudio es identificar y analizar, según la clasificación de Glaeser (1981), las dificultades en el aprendizaje de los números negativos que presentan los estudiantes del séptimo grado, sección "C", del Centro Escolar Confederación Suiza, del municipio de San Salvador, El Salvador, principalmente a partir de los retrocesos y estancamientos del nivel de comprensión, según el modelo de Pirie y Kieren (1994), al resolver un examen con ejercicios de operaciones con números enteros.

Justificación

Es crucial que los estudiantes comprendan los números enteros y las operaciones básicas asociadas, debido a su papel fundamental en las matemáticas y en la vida diaria (Siegler, 2022).

La enseñanza de los números negativos en la educación primaria es esencial para el desarrollo numérico de los estudiantes; sin embargo, no existe un modelo de enseñanza completamente exitoso y las principales dificultades se encuentran en las operaciones de resta y multiplicación (Bruno Castañeda y García Alonso, 2021).

Los estudiantes tienden a tener problemas al operar con números de diferentes signos, especialmente cuando restan una cantidad mayor de una menor, un error común es aplicar erróneamente las reglas de multiplicación a sumas y restas de números enteros (Bermeo Muñoz y Torres Daza, 2022).

De acuerdo con Glaeser (1981) los estudiantes tienden a aplicar automáticamente viejas reglas a nuevas situaciones sin reconocer los cambios en las condiciones, lo que ocurre al pasar de operar únicamente con números naturales, a operar con números enteros (positivos y negativos).

Orrantia (2006) señala que es importante el estudio de las dificultades de aprendizaje de los números negativos que presentan los estudiantes ya que afectan su rendimiento, e identificarlas permite crear estrategias de enseñanza personalizadas y fomentar una educación inclusiva y más efectiva.

Discusión teórica

Al respecto de las herramientas teóricas utilizadas en este trabajo, se destaca, por un lado, la novedad de explorar la comprensión del concepto de números enteros por medio del modelo P-K, que no se ha realizado hasta ahora; y, por consiguiente, también se destaca la novedad de utilizar conjuntamente el modelo P-K y la clasificación de dificultades de Glaeser (1981). La justificación de usar ambas herramientas radica en que las dificultades, a diferencia de los errores, no son directamente observables, y por ello se ha recurrido al modelo P-K para analizar la evolución de los niveles de comprensión, y a partir de ese análisis, determinar la dificultad subyacente que provoca los cambios o estancamientos en los niveles de comprensión, que son más fáciles de observar.

Clasificación de dificultades en los números negativos

Glaeser (1981) analizó textos históricos para identificar los obstáculos, dificultades o umbrales, en la aceptación y comprensión de los números negativos, y afirma que las dificultades de los alumnos para comprender y operar con los números negativos reflejan las etapas del desarrollo histórico de estos números. Las dificultades en el desarrollo histórico del concepto de número entero, según Glaeser (1981), son las siguientes:

- Falta de aptitud para manipular cantidades negativas: En el siglo III, por ejemplo, Diofanto no aceptaba a los números negativos en cálculos algebraicos.
- Dificultad para dar sentido a cantidades negativas: En el siglo XVIII, algunos matemáticos como Stevin y D'Alembert reconocían las soluciones negativas en ecuaciones, pero las consideraban ficticias, no reales.
- Dificultad para unificar la recta real: Algunos matemáticos de gran importancia histórica, como Descartes, McLaurin y Cauchy, veían números negativos y positivos como opuestos en lugar de una sola recta numérica, favoreciendo dos semirrectas.
- Ambigüedad de los dos ceros: Algunos matemáticos del siglo XVIII, como Stevin, McLaurin y D'Alembert tuvieron dificultades para pasar del cero absoluto (la nada) al cero arbitrario (punto de simetría entre positivos y negativos).
- Estancamiento en el estadio de las operaciones concretas: Aunque se superaron obstáculos para aceptar los números negativos y su estructura aditiva, la multiplicación siguió siendo problemática hasta mediados del siglo XIX. Se trata de la creencia de que una noción matemática, en este caso los números negativos, debe tener un referente físico que justifique sus propiedades y los resultados de sus operaciones.
- Deseo de un modelo unificador: Consiste en el deseo de poder conseguir un modelo didáctico que, partiendo de la realidad cercana al alumno, pueda ser unificador tanto en lo que se refiere a la adición como a la multiplicación de enteros.

Glaeser (1981) concluye que es necesario estudiar a los alumnos para identificar si persisten en ellos los obstáculos históricos, y, además, señala que los modelos concretos, en general, dificultan la comprensión de los números enteros.

A pesar de ser una clasificación que tiene ya varias décadas de antigüedad, sigue siendo relevante en la investigación teórica e investigación-acción. Cid Castro (2016), en su tesis doctoral asesorada por Guy Brousseau, realizó un análisis histórico y documental sobre los obstáculos epistemológicos, didácticos y concepciones de los números negativos, dándole una destacada mención al aporte de Glaeser (1981). Castillo Angulo (2014) señala que esta clasificación, utilizada en su investigación-acción en Colombia, fue útil para identificar las dificultades de un grupo de 41 estudiantes de séptimo grado de una escuela pública urbana. Los instrumentos que aplicó constan de ítems que contienen ejercicios algorítmicos de números enteros y también problemas de texto, involucrando el uso de la regla de signos en la suma, resta y multiplicación, además de incluir ítems que requieren la construcción de la recta numérica y la comprensión de propiedades como el valor absoluto. Uno de esos instrumentos se ha reutilizado en este trabajo.

Otra investigación similar a la de Castillo Angulo (2014), que documenta el uso de esta clasificación para caracterizar las dificultades en el aprendizaje de los números enteros, es el estudio de caso reportado por Mena Ayala (2021), cuyo propósito fue caracterizar los obstáculos que poseen ocho estudiantes indígenas de séptimo grado, de una institución educativa rural del sur de Colombia, en la resolución de problemas con estructura aditiva de números enteros. Ese estudio concluyó que los estudiantes luchaban por unificar números positivos y negativos en la misma recta numérica, dificultando sus habilidades de resolución de problemas; además, los hallazgos resaltaron la falta de relevancia de los números enteros en la vida cotidiana de los estudiantes.

Otros ejemplos de trabajos en América Latina, además de los de Castillo Angulo (2014) y Mena Ayala (2021), que se apoyan en esta clasificación, son las tesis de Aponte Bello y Rivera Martínez (2017), y de Medina Carruitero (2014). Aponte Bello y Rivera Martínez (2017) desarrollaron un objeto virtual de aprendizaje (OVA) para usarse en la capacitación de docentes de matemática en Colombia sobre las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de los números enteros; y para explicar los posibles obstáculos que pueden presentar los alumnos, lo hacen a partir de la clasificación de Glaeser (1981). Medina Carruitero (2014), analiza si la organización de los libros de texto de sexto y séptimo grado de una editorial privada, utilizados en Perú, favorece que los alumnos superen los obstáculos epistemológicos que se presentan en el aprendizaje de los números enteros, utilizando la clasificación de Glaeser (1981) como parte de su marco teórico. Para ello, considera en estos libros, la presentación de la teoría, la justificación de propiedades, los significados del signo negativo, los problemas y su relación con el álgebra. Entre otras cosas, el estudio concluye que los libros en cuestión adolecen de una introducción de los números enteros a partir de modelos aritméticos concretos, lo que propicia el estancamiento en el estadio de las operaciones concretas del que habla Glaeser (1981).

Modelo de Pirie y Kieren

El Modelo de Pirie y Kieren (1994), que en lo sucesivo llamaremos: Modelo P-K, describe la comprensión matemática como un proceso dinámico y no lineal, caracterizado por ser estable y recursivo, donde el pensamiento de los estudiantes evoluciona en ocho niveles de sofisticación a través de una constante organización y reorganización de sus conocimientos, desde un nivel muy elemental a niveles de gran complejidad y creatividad:

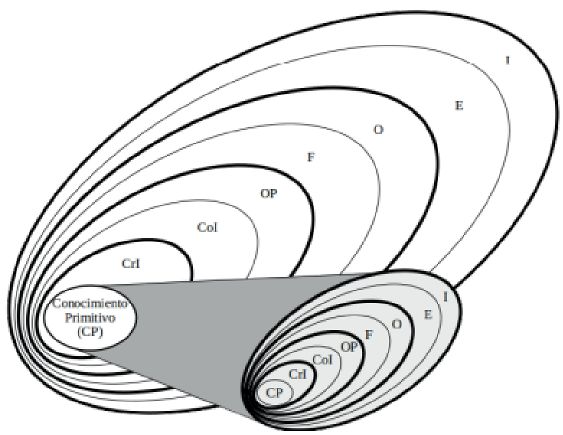
- Conocimiento Primitivo (CP): Estado previo del conocimiento del estudiante en una situación de aprendizaje, equivalente a los conocimientos previos. Es lo que el estudiante sabe antes de iniciar su aprendizaje del nuevo concepto. En el caso del concepto de números enteros, el CP incluye ser capaz de realizar operaciones básicas con los números naturales, tener la noción del cero como la nada, y ser capaz de determinar correctamente el orden relativo de los números naturales.
- Creación de la Imagen (Crl): Uso del conocimiento primitivo para generar una idea del concepto mediante imágenes, ya sean mentales o físicas. Estas imágenes no necesariamente son correctas, y pueden ser ejemplos de clase, ejemplos del libro, recuerdo de verbalizaciones del profesor, o de sus compañeros, animaciones, dibujos, gráficas, etc. Si un estudiante todavía necesita recursos manipulativos o bien, regresar a leer ejemplos (por ejemplo, del libro) para poder trabajar con el concepto.
- Comprensión u Obtención de la Imagen (Col): Reemplazo de imágenes físicas por imágenes mentales, conectando acciones físicas y mentales para reconocer propiedades globales del concepto. Este es el nivel en el que ya se tiene imágenes mentales (aunque sean incorrectas), y es cuando los alumnos ya no necesitan recurrir a material manipulativo o regresar a ver ejemplos del libro para trabajar con el concepto.
- Observación de la Propiedad (OP): Análisis de imágenes mentales para identificar y relacionar atributos, llevando a definiciones informales del objeto matemático. Es cuando los estudiantes ya han interiorizado alguna propiedad que relaciona diferentes imágenes mentales, y son capaces de generalizarlas (aunque estén equivocadas).
- Formalización (F): Extracción y descripción de propiedades comunes de imágenes en lenguaje matemático, ya sea formal o informal. En este nivel, los estudiantes son capaces de construir una definición matemática adecuada (sin errores), aunque el lenguaje no sea formal.
- Observación (O): Uso del pensamiento formal para formular y probar hipótesis sobre temas matemáticos, determinando si son teoremas o suposiciones limitadas.

- Estructuración (E): Axiomatización del conocimiento propio, reduciendo observaciones a proposiciones básicas y explicando la interrelación de teorías.
- Invención (I): Capacidad de crear nuevos conceptos que desestabilizan estructuras cognitivas existentes y generan nuevas formas de concebir el mundo.

En la Figura 1 se presenta una representación gráfica de los niveles de este modelo, incluyendo su naturaleza recursiva, en el que la comprensión de un concepto se convierte en el Conocimiento Primitivo (CP) de otro concepto.

Figura 1

Naturaleza recursiva de los niveles del modelo de Pirie y Kieren (1994)



Nota. Tomado de Navas-López (2022).

Una de las características de suma importancia de este modelo es el proceso de redoblado (folding back), que permite a una persona funcionar en un nivel exterior y enfrentarse con un desafío, para regresar a un nivel de comprensión más interno con el fin de reconstruir esa comprensión como base para nuevos niveles externos de comprensión (Pirie y Kieren, 1994). Estos redoblados ocurren cuando los estudiantes se enfrentan a una actividad cognitiva, y se dan cuenta que no pueden resolverla a partir de las imágenes mentales de las que disponen (Pirie y Kieren, 1994), y pueden desencadenarse debido a la interacción del profesor (Thom y Pirie, 2006), o bien, por la interacción entre ellos mismos al trabajar en grupo (Navas-López, 2022).

Para expresar gráficamente la evolución de la comprensión de uno o varios estudiantes durante la resolución de una actividad cognitiva según este modelo, es común utilizar un diagrama similar al de la Figura 1, pero agregando flechas que indican las transiciones identificadas. Ver por ejemplo la figura 12 de Pirie y Kieren (1994, p. 186), las figuras 9, 13, 15, y 19 de Arenas-Peñaloza et al. (2024), y la figura 3 de Navas-López (2022, p. 167).

El modelo P-K se ha utilizado en múltiples investigaciones en América Latina para poder analizar la evolución de la comprensión en el aprendizaje de diversos conceptos matemáticos. Por ejemplo, Carmona Correa (2020), realizó un estudio de casos en 37 alumnos, de quinto grado de primaria de una escuela en un barrio colombiano afectado por la violencia, desplazamiento y migración, sobre su comprensión de los conceptos de paralelismo y perpendicularidad. Se destaca entre sus resultados, que no todos los niños alcanzaron el mismo nivel de comprensión, a pesar de la homogeneidad de la instrucción. Algunos llegaron al nivel de observación de la propiedad (OP), mientras que otros sólo llegaron al nivel de comprensión de imagen (CoI), y otros sólo el de creación de imagen (CrI). En otro contexto, Arenas-Peñaloza et al. (2024) lo utilizaron para analizar la comprensión del concepto de razón en cuatro estudiantes de sexto grado de una escuela de México. Su comprensión osciló entre el nivel de comprensión de la imagen (CoI), hasta el nivel de formalización (F).

El estudio de George y Voutsina (2023) se centró en las verbalizaciones y acciones de nueve niños de quinto grado de la Mancomunidad de Dominica, en el archipiélago de las Antillas Menores, durante tareas de partición (división) de pizzas y pasteles entre varias personas. Se exploró cómo los niños crean imágenes (niveles CrI y CoI) mientras resuelven nuevas tareas matemáticas, utilizando el modelo P-K para comprender su proceso de pensamiento. El análisis de los datos mostró que los niños utilizaron diferentes imágenes para diversas tareas, incluso dentro de la misma tarea, lo que indica una forma compleja de entender las matemáticas. En El Salvador, Navas-López (2022) lo utilizó para analizar la comprensión del concepto de equivalencia lógica en tres estudiantes universitarios de primer año que resolvieron tres ejercicios en grupo; y también ocurrió que a pesar de la homogeneidad de la instrucción, los tres estudiantes no sólo no alcanzaron el mismo nivel de comprensión al final de la recolección de datos, –dos de ellos, formalización (F) y uno, observación (O)– sino que la evolución de su comprensión fue muy diferente, presentando múltiples redoblados.

El propósito de usar el modelo P-K es que los maestros puedan adaptar sus enfoques de acuerdo con la comprensión demostrada por los estudiantes. Esto incluye el uso de materiales y problemas que faciliten el movimiento a través de los niveles del modelo (Wright, 2014).

Métodos y materiales

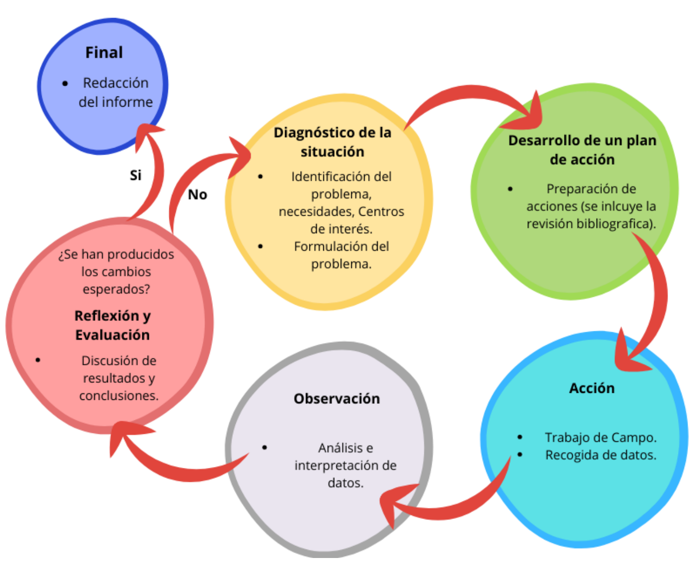
La metodología de esta investigación tiene un enfoque cualitativo con alcance exploratorio, basado en el análisis de contenido de los procedimientos de solución de los alumnos. Su propósito es descubrir fenómenos poco conocidos en el medio concreto y establecer una comprensión inicial sobre el tema.

Este trabajo forma parte de un esfuerzo más amplio de investigación-acción, y aquí se reporta un ciclo completo de investigación-acción (ver Figura 2). Las fases que se aplicaron son las planteadas por Colás Bravo y Buendía Eisman (1994), que se describen a continuación:

1. Diagnóstico de la situación: Esta fase se llevó a cabo durante la primera semana de observación en la institución educativa, donde se detectaron los problemas de aprendizaje de los estudiantes, en el tema de los números negativos. A partir de esto, se identificó y formuló la problemática de interés a investigar.
2. Desarrollo del plan de acción: Se realizó una revisión bibliográfica, se construyó el marco teórico basado en investigaciones previas sobre las dificultades en el aprendizaje de los números negativos, y se seleccionaron las herramientas más adecuadas para la recolección y análisis de datos, con el fin de sentar las bases para las acciones para la siguiente fase.
3. Acción: Se registró en audio la resolución de un examen grupal por parte de tres grupos de cuatro estudiantes, lo que permitió evaluar su comprensión y habilidades en relación con los números negativos. Además, se realizó un seguimiento mediante un diario de campo para aportar información adicional sobre su comprensión de los números negativos.
4. Observación: En esta fase, se realizó un análisis detallado de los datos obtenidos mediante los instrumentos de recolección de datos. Se examinaron los avances y retrocesos en los niveles de comprensión, para luego identificar las dificultades generales en el aprendizaje de los números negativos.
5. Reflexión y Evaluación: Se generaron conclusiones y discusión a partir del análisis de los resultados obtenidos. Esto permitió evaluar las acciones realizadas, aumentar el conocimiento de los docentes involucrados sobre las dificultades y avances en el aprendizaje de los estudiantes, y reflexionar sobre las acciones subsiguientes más apropiadas, para con el mismo grupo de estudiantes, así como para las siguientes cohortes.
6. Informe Final: Se elaboró el informe final con cada una de sus partes y formato correspondientes.

Figura 2

Pasos para realizar un ciclo de investigación-acción



Nota. Elaboración propia en base a los pasos de Colás Bravo y Buendía Eisman (1994).

La recogida de datos se llevó a cabo, entre los meses de julio y agosto de 2024, en el Centro Escolar Confederación Suiza, ubicado en el Km 8½ de la carretera a Planes de Renderos, en una zona rural del departamento de San Salvador, El Salvador. Este centro cuenta con 591 estudiantes (300 de sexo femenino y 291 de sexo masculino), 15 aulas y 34 maestros. Se ofrece educación parvularia y básica (primero a noveno grado) en turnos matutino y vespertino.

Debido a limitantes de tiempo de los estudiantes, la evaluación se llevó a cabo en la sala de docentes durante la clase de Matemática, siguiendo las indicaciones de la profesora a cargo del grado, quien permitió que los estudiantes pudieran salir, por grupos, del salón de clase para realizar el examen en únicamente tres sesiones en días diferentes (una sesión por semana), con una duración de 45 minutos cada una, correspondiente al tiempo de una clase regular. Así que, aunque el séptimo grado sección "C" está conformado por 21 estudiantes, se decidió que cada grupo, denominados Grupo A, Grupo B y Grupo C, estuviera conformado únicamente por 4 estudiantes, de tal forma que cada grupo fuera de un número reducido para poder observar y registrar el mayor detalle posible de sus interacciones por parte de un solo investigador. Por ello, únicamente se consideraron 12 estudiantes, que fueron seleccionados en conjunto con la profesora del grado, de tal modo que cada grupo tuviera un estudiante proactivo.

Se utilizaron dos instrumentos fundamentales: el diario de campo, y un examen grupal, cuya resolución, es decir, la discusión que ocurrió entre los estudiantes de cada grupo al resolver el examen, fue grabada en audio por medio de teléfono celular. En el diseño de diario de campo se registró sistemáticamente las observaciones, reflexiones y descripciones contextuales. Este se utilizó para documentar las dificultades de los estudiantes durante el examen, registrando sus acciones y contribuyendo al análisis posterior de las conversaciones grabadas de cada grupo.

El examen aplicado, es la prueba diagnóstica de Castillo Angulo (2014, p. 97-99), que evalúa la comprensión de los estudiantes sobre los números negativos, identificando dificultades en las operaciones y en su ubicación sobre la recta numérica. La Tabla 1 presenta la relación de los ítems del examen, con los temas correspondientes según las unidades didácticas del libro de texto ESMATE de séptimo grado (MINEDUCYT, 2019) que se aplica en El Salvador.

Tabla 1

Relación de problemas del examen aplicado con las unidades didácticas del libro de texto oficial utilizado

Problemas	**Unidades didácticas del currículo oficial**
P1, P2 y P3	Unidad 1: Número positivos negativos y cero.
P4, P5, P6, P8, P9 y P10	Unidad 2: Suma y resta de números positivos, negativos y el cero.
P7	Unidad 3: Multiplicación y división de números positivos, negativos y el cero.

Nota. Elaboración propia.

Cada grupo realizó el examen en días diferentes, conforme a la distribución del tiempo en la institución educativa. Se grabó el audio de las conversaciones de los estudiantes durante la ejecución del examen.

Posteriormente se utilizaron las grabaciones junto con el diario de campo para analizar detalladamente las conversaciones de los tres grupos. El análisis se realizó siguiendo los lineamientos de Navas-López (2022) y George y Voutsina (2023). Fundamentalmente se buscaron indicios, tanto en la grabación como en el diario de campo, que indicaran el nivel de compresión, y avances y retrocesos en la comprensión, según el modelo P-K, de cada miembro del grupo durante la resolución de cada problema del examen; para luego identificar las dificultades, según la clasificación de Glaeser (1981), que provocan los retrocesos o estancamientos observados en el nivel de comprensión.

Resultados

La estructura de esta sección se divide en subsecciones que abordan las primeras cinco dificultades identificadas por Glaeser (1981), que son las que fueron observadas entre los estudiantes. Cada una de las cuales incluye al menos un ejemplo y un análisis de cómo los grupos intentaron resolver los ejercicios. La codificación es como sigue: El Grupo A, está compuesto por los estudiantes A1, A2, A3 y A4, y, por ejemplo, se citará la intervención GA-A1-5, que corresponde a la intervención 5 en la conversación del Grupo A, por parte del estudiante A1. En el Grupo B, por ejemplo, la etiqueta GB-B4-10 se refiere a la intervención 10 en la conversación del Grupo B por parte del estudiante B4. Finalmente, se aplica la misma codificación para el Grupo C. El código utilizado para indicar las intervenciones del profesor/investigador es “Prof”.

La transcripción completa de las tres conversaciones se encuentra disponible a solicitud del lector. A continuación, se presentan las dificultades identificadas.

Falta de aptitud para manipular cantidades negativas

En el siguiente fragmento de la conversación del Grupo A se analiza cómo los estudiantes abordan la suma de números con diferente signo en el problema P5:

P5. Realizar la siguiente operación: $-10+8=$

GA-A1-14: “¿Va [verdad], que si tenemos dos números con diferente signo se suman?”.

GA-Prof-15: “Recuerden la propiedad de la página 14 [del libro de texto] que la maestra les preguntó la semana pasada, el cual nos sirve para sumar números con diferente signo” (Aunque, los estudiantes, debido a que no entendían la propiedad, lo resolvieron como su compañero A1 lo planteó).

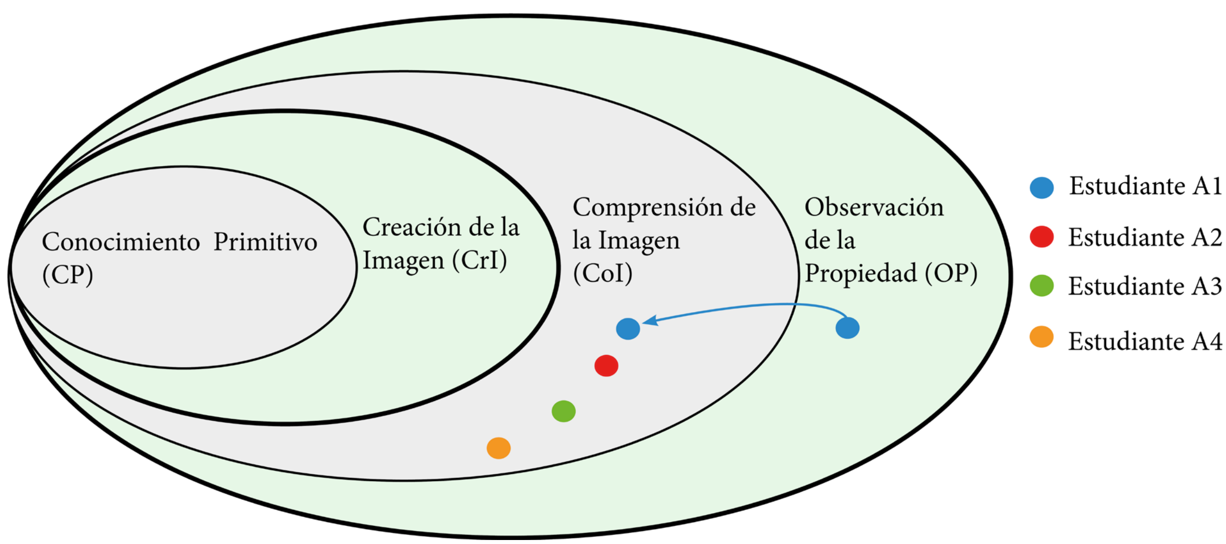
GA-A1-16: "Sí, sumémoslo, pero le agregamos el signo del mayor" (Ignora lo que dijo el profesor, y los demás asienten).

Se observa que el estudiante A1, tiene una imagen mental de la operación y generaliza una propiedad, aunque es incorrecta. Esto sugiere que se encuentra en el nivel OP en ese momento. Sin embargo, al ignorar la corrección del profesor y realizar las operaciones según su recuerdo, se evidencia que no está en el nivel OP, sino en CoI (retroceso OP→CoI), porque, aunque no necesitó de un recurso manipulativo o ejemplo concreto, no es capaz de verificar similitudes y diferencias, y de razonar con las imágenes mentales (Wright, 2014). Esto es así, ya que según Thom y Pirie (2006), el nivel CoI comprende saber una pieza de matemática como una cuestión de hecho, ya sea correcta o incorrecta.

Los estudiantes A2, A3 y A4, al aceptar la propiedad expresada por A1, indica que no necesitan actividades concretas para utilizar la construcción mental (la propiedad errónea), es decir, que deben estar arriba del nivel CrI, pero al igual que A1, no logran verificar potenciales inconsistencias con otras imágenes mentales (como la propiedad a la que se hace referencia en GA-Prof-15), por lo que se interpreta que se encuentran todos estancados en el nivel CoI (no hay movimiento, no hay redoblado). Los cambios en la comprensión se presentan gráficamente en la Figura 3.

Figura 3

Evolución de la comprensión de los miembros del Grupo A al enfrentarse al problema P5



Nota. Elaboración propia.

Esta dificultad también se pudo observar en el momento en que el Grupo B se encontraba intentando solucionar el problema P7, en el que se evidencia que los estudiantes enfrentan dificultades al aplicar la ley del producto en operaciones combinadas:

P7. Realizar: 8 – (–5)=

GB-B3-18: “Mmmm, pero en el caso del paréntesis, menos por menos es menos”.

GB-Prof-19: “Para el paréntesis, recuerden las leyes del producto, en el que, si tenemos el producto de números de diferente signo, el signo es negativo; y si tienen igual signo el signo es positivo” (Al igual que en el caso anterior, los estudiantes resolvieron según lo que había mencionado su compañero B3, debido a que cuando se enunció la propiedad no la comprendieron).

GB-B2-19: “Sí, así es, como dijo el compañero”.

El estudiante B3, al comprender el problema y aplicar la ley de signos del producto (una propiedad), se puede ubicar en el nivel OP, aunque la propiedad es errónea, tal como en el ejemplo anterior. Sin embargo, al hacerlo según su recuerdo, se confirma que el estudiante B3 no se encuentra en el nivel OP sino en el nivel CoI (retroceso), puesto que –igual que A1 en el ejemplo anterior–, aunque no necesitó de un recurso manipulativo o ejemplo concreto (debe estar arriba de CrI), no es capaz de verificar similitudes y diferencias con otras imágenes mentales (específicamente con la propiedad indicada en GB-Prof-19), y de razonar con ellas, por lo que no se puede ubicar en ese momento en OP, sino en CoI. El estudiante B3 (al igual que A1 en el ejemplo anterior) no experimentó el conflicto cognitivo necesario para reconstruir algunas de sus imágenes mentales erróneas, y por lo tanto no ocurrió el redoblado como tal.

Con respecto a los demás estudiantes, al ignorar estos la intervención del profesor para recordarles la ley de los signos del producto y decidir seguir el enfoque del compañero B3 (aceptar esa imagen mental equivocada, pero compartida por ellos), muestran que, aunque conocen la ley (equivocada) de memoria (deben estar arriba de CrI), tienen dificultades para comprenderla correctamente y no son capaces de razonar con las imágenes mentales potencialmente conflictivas (no pueden estar en OP). En consecuencia, los estudiantes B1, B2 y B4 se encuentran en el nivel CoI, sin presentar avances o retrocesos notorios. Se presentan gráficamente los cambios en la comprensión de los sujetos B1, B2, B3 y B4 en la Figura 4.

Dificultad para dar sentido a cantidades negativas

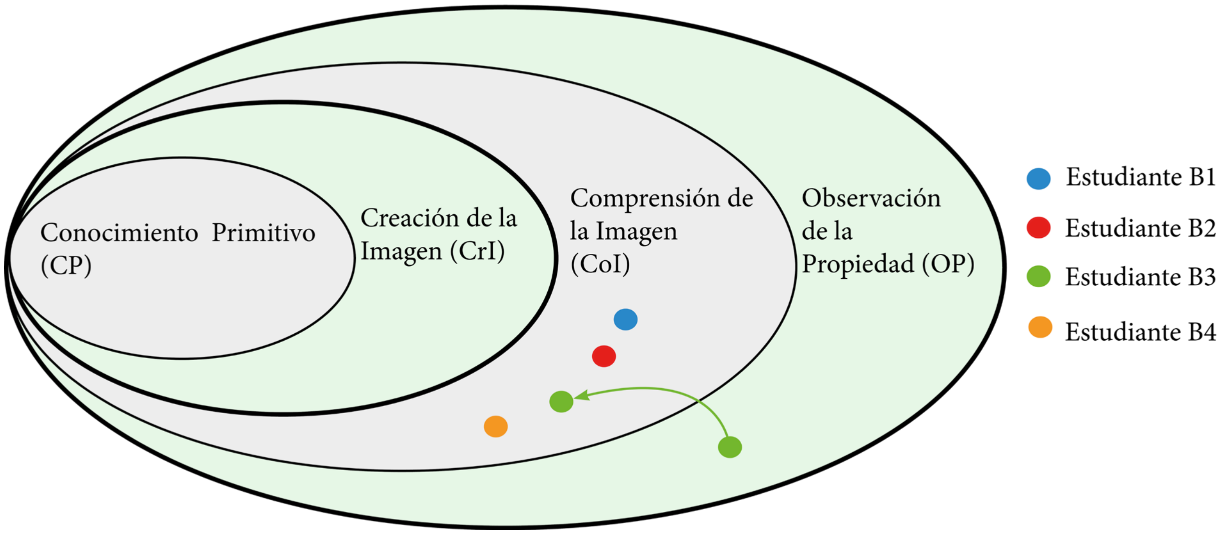
Esta dificultad es la que apareció más veces, sin embargo, se presentan aquí sólo tres ocurrencias.

El siguiente fragmento es la conversación del Grupo C, al abordar la suma de números con diferentes signos en el problema P9, y el proceso realizado y discutido por los alumnos se presenta en la Figura 5:

P9. La temperatura de un congelador es de –23°C. Si aumenta la temperatura 17°C, ¿Qué temperatura marca ahora el termómetro?

Figura 4

Evolución de la comprensión de los miembros del Grupo B al enfrentarse al problema P7



Nota. Elaboración propia.

GC-C2-15: "Bueno, en el [problema] 9 como nos dice que tenemos –23°C y aumenta la temperatura a 17°C. Sólo sumamos eso y le agregamos el signo menos".

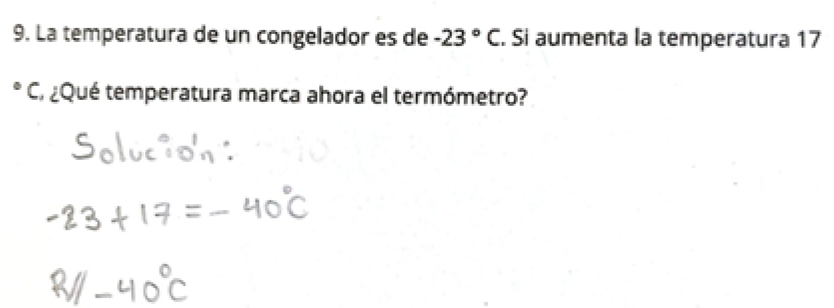
GC-Prof-16: "Deben de considerar la ley de los signos de la suma" (Según los registros del diario de campo, los estudiantes se la sabían de memoria, pero debido a que era un problema de texto, no la podían relacionar).

GC-C3-17: "Sí, ¿entonces es –23+17= –40°C?" (C3 ignora lo que dijo el profesor).

GC-C4-18: "Sí, así como dijo el compañero [C3]" (Ignora lo que dice el profesor y acepta el procedimiento de C3).

Figura 5

Enunciado del Problema 9 y solución discutida por el Grupo C

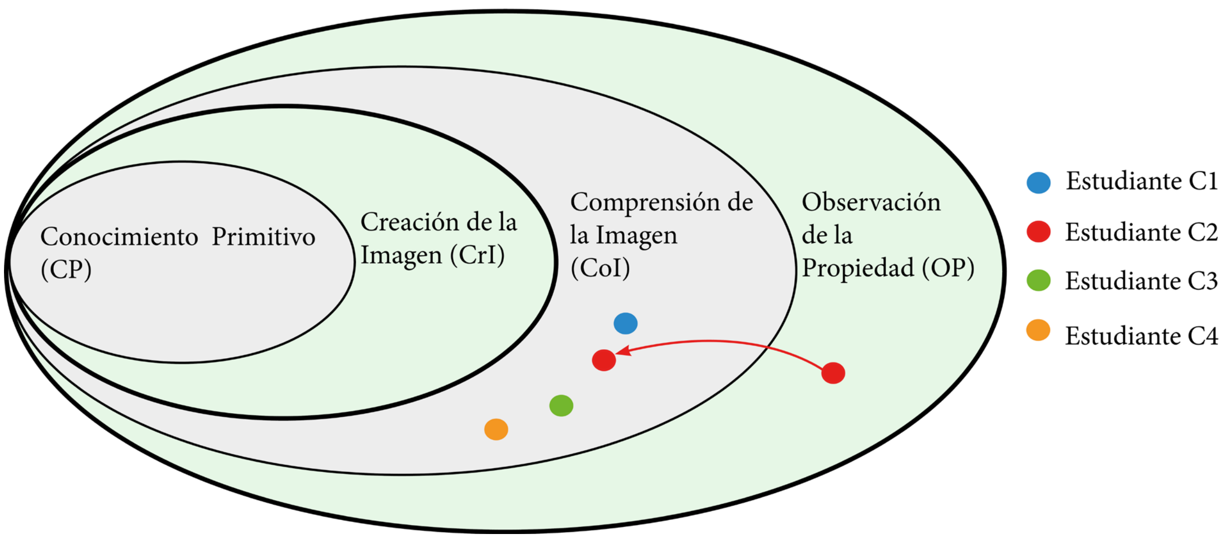


Nota. Elaboración propia.

Se puede apreciar que el estudiante C2 enuncia una propiedad –aunque errónea– de la suma de números con diferentes signos, lo que indica que está en el nivel OP. Al no interpretar el aumento de temperatura de 17°C sólo como una suma, demuestra una falta de comprensión de las reglas fundamentales para operar con números enteros de signos opuestos. Luego, el profesor interviene para recordarles la ley de los signos en la suma, pero C2 ignora la intervención, y reforzado por el apoyo de C3 y C4, se aferran todos a un conocimiento equivocado (propiedad), lo que indica una incapacidad de reflexionar sobre dos imágenes mentales que se contradicen (la propiedad que indica GC-C2-15, y la ley de signos de la suma, que se saben de memoria). Por ello, similar a lo presentado en los casos de la subsección anterior, C2 experimenta un retroceso al nivel CoI, mientras que los demás, C1, C3 y C4 se ven limitados, sin presentar movimiento en el nivel CoI. Los cambios en la comprensión en este caso siguen el mismo patrón ya visto, y se pueden observar gráficamente en la Figura 6.

Figura 6

Evolución de la comprensión de los miembros del Grupo C al enfrentarse al problema P9



Nota. Elaboración propia.

Esta dificultad también se pudo observar en el Grupo C, al intentar resolver el problema P3:

P3. En el plano cartesiano ubicar las siguientes parejas de números A=(2,3), B=(2,4), C=(0,–3) y D=(5,–3). [Adjunto en el instrumento hay un plano cartesiano tradicional con cuadrícula en el espacio (–8,8)×(–6,6)]

GC-C4-7: "El [problema] tres lo hago yo. En este sólo es de ubicar los puntos y el primer número es x y el otro es y".

GC-C4-8: "¿Pero qué recta es x y y en el plano?" (C2 y C3 no dicen nada).

GC-C1-9: "El vertical es *y* y el horizontal es *x*" (Y hace movimientos, vertical y horizontal, con el dedo índice).

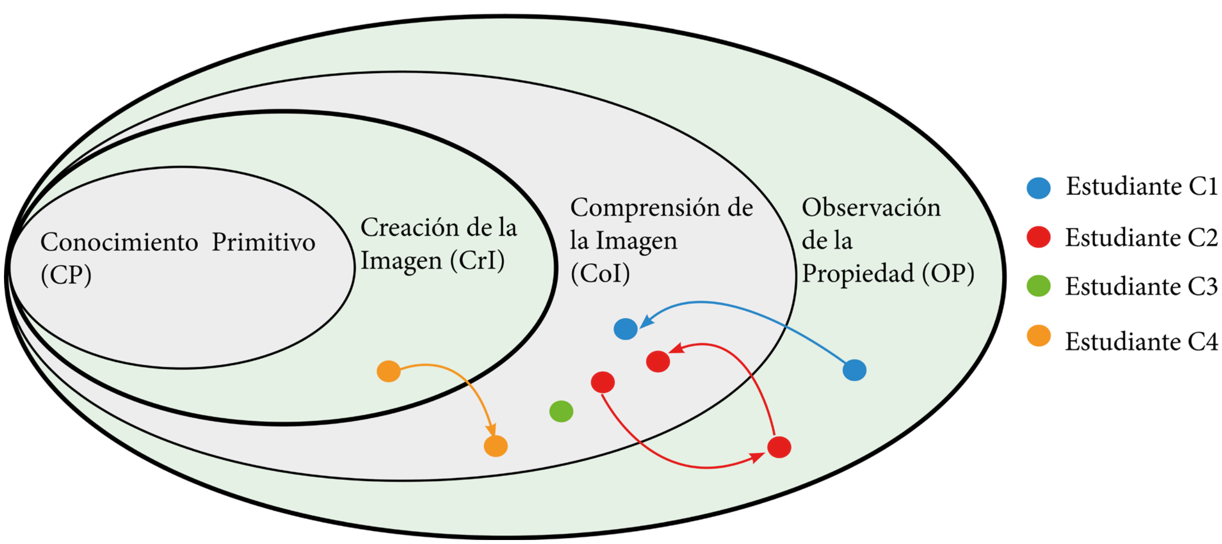
GC-C2-10: "Sí, pero los puntos quedan todos arriba ¿verdad?" (Refiriéndose a los cuadrantes con ordenada positiva, y los demás estudiantes estuvieron de acuerdo).

GC-Prof-11: "Deben de recordar que para ubicar los puntos de coordenadas deben de considerar el signo" (Pero ignoran lo que dice el profesor, y proceden como indicó C2, ubicando incorrectamente los puntos C y D).

El estudiante C4 menciona una propiedad –incompleta o fragmentada– que relaciona los pares ordenados con el plano cartesiano, pero de inmediato se da cuenta que aún no sabe quiénes son *x* y *y* en él, lo que indica que no sólo la propiedad no está clara en su mente (así que no puede estar en OP), sino que todavía no tiene bien definida una imagen mental que le permita llegar a la relación (propiedad) horizontal-es-*x* y vertical-es-*y*. Esto lo sitúa en el nivel CrI en ese primer momento. El estudiante C1 se ubica en el nivel OP al mostrar tener clara la propiedad que C4 no recordaba completamente. Luego, C4 avanza al nivel CoI, ya que acepta lo que C1 ha dicho. Esto es así, porque ahora C4 ya tiene esa imagen mental. En un primer momento, para los estudiantes C2 y C3, al no expresarse verbal ni físicamente, no se pudo determinar su nivel de comprensión. Pero luego, al estar de acuerdo con lo que complementó C1, se ubican en el nivel CoI (porque se asume que al menos ahora sí tienen esa imagen, igual que C4), y no en OP, ya que no hay evidencia, en ese momento, de que hayan asimilado la generalización de la propiedad complementada por C1. Sin embargo, el estudiante C2, al generalizar aún más sobre las características de las coordenadas en el plano cartesiano, avanza al nivel OP, aunque se trata de una propiedad errónea. No obstante, al no considerar el signo de las coordenadas ni la intervención del profesor, en realidad los estudiantes C3 y C4 se mantienen en el nivel CoI, y C1 y C2 bajan de OP, porque no logran razonar sobre sus imágenes mentales incorrectas. Este complejo proceso se presenta gráficamente en la Figura 7.

Figura 7

Evolución de la comprensión de los miembros del Grupo C al enfrentarse al problema P3



Nota. Elaboración propia.

Este tipo de dificultad también se pudo observar cuando los estudiantes del Grupo A se encontraban intentando resolver el problema P1, en el que se analiza la comprensión que tienen los estudiantes acerca de la relación de orden entre los números enteros:

P1. Ubicar los símbolos, > " mayor que" , < "menor que", o = "igual" según corresponda:

a) –10 __ –3

b) 2 __ –22

c) 12 __ 13

d) 0 __ 120

GA-A1-1: "Bueno, hagamos el primer numeral ¿Va [Verdad] que, en el primero sólo ponemos cuál es mayor?" (Se refiere a cuál de los dos números es más grande, es decir, de mayor valor absoluto).

GA-A2-2: "Sí, eso, pero verdad que sólo vemos cuál es mayor [habla de su valor absoluto] y el signo "–" menos, sólo nos sirve cuando restamos, por lo que [en el literal a] ponemos que –10>3".

GA-Prof-3: "Recuerden que en los negativos entre más cerca estén del cero mayor es, y en los positivos entre más lejos esté el número es el mayor." (Los estudiantes resolvieron ejercicios similares en las semanas previas, sin embargo, los estudiantes lo hicieron como ellos consideraron en ese momento).

GA-A2-4: "Cabal, así es, ahora hagamos el dos".

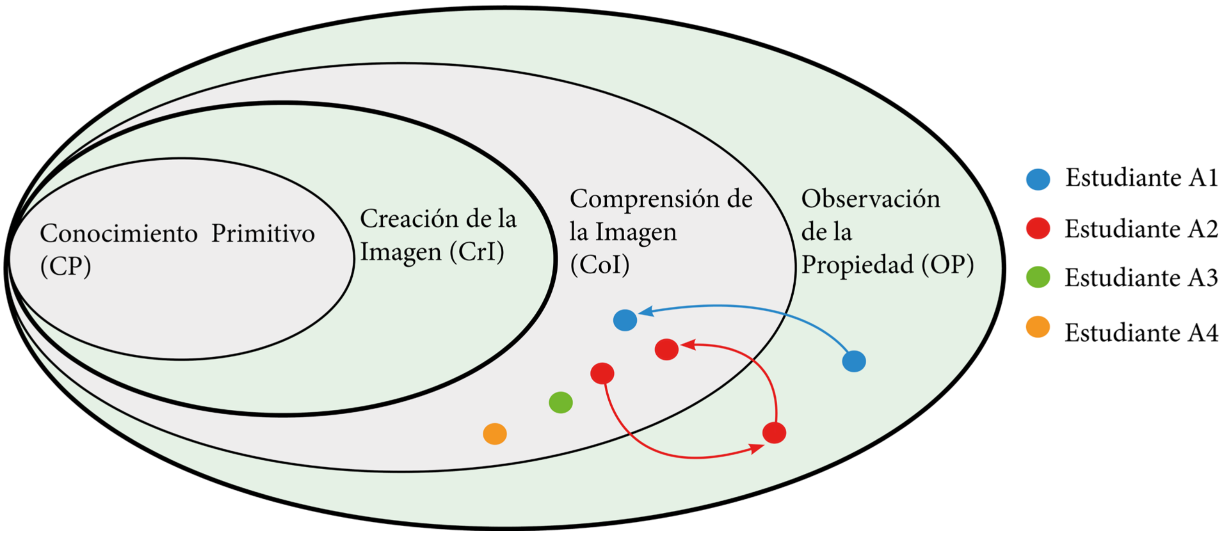
El estudiante A1, al preguntar a sus compañeros si debían poner sólo el mayor número, confirma que tiene una imagen mental de la relación (propiedad), aunque espera la confirmación de sus pares, la generaliza, por lo que se puede ubicar en el nivel OP (aunque es una propiedad errónea). En ese momento, de los demás estudiantes, al aceptar lo que dijo su compañero, sólo podemos decir que tienen esa imagen mental pero no que hayan interiorizado la generalización, por lo que se ubican en el nivel CoI. El estudiante A2, al describir dos propiedades, aunque erróneas, de los números enteros, avanza al nivel OP. Luego, el profesor intervino, pero al ser ignorado, se evidenció que los estudiantes C3 y C4 seguían en el nivel CoI, y C1 y C2 regresaron a CoI, por la misma razón que en los casos anteriores: Ninguno fue capaz de armonizar imágenes mentales potencialmente conflictivas. Este estancamiento en la comprensión se puede observar gráficamente en la Figura 8.

Dificultad para unificar la recta real

En el siguiente fragmento de la conversación del Grupo B, al trabajar el Problema P2, se analiza cómo los estudiantes abordan cuestiones relacionadas con la construcción de la recta numérica y la ubicación de números positivos y negativos en ella. En la Figura 9 se presenta la solución desarrollada por ellos.

Figura 8

Evolución de la comprensión de los miembros del Grupo A al enfrentarse al problema P1



Nota. Elaboración propia.

P2. En la recta real ubicar los siguientes números –2, 5, 0, –1, 3, –4. [Se anexa un segmento de recta con flechas en los extremos, sin etiquetas y sin marcas]

GB-B3-3: "¿En el dos, verdad que, sólo es de ir ubicando los números en la recta?" (Los demás confirman estar de acuerdo).

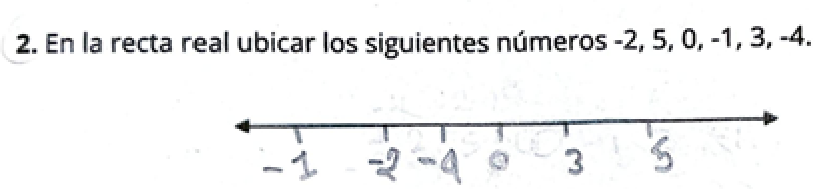
GB-B4-4: "Sí, pero los negativos van a la izquierda y los positivos a la derecha".

GB-Prof-5: "Recuerden que deben de considerar el orden desde el cero que es el número que divide a los positivos de los negativos" (Hace señas con ambas manos indicando un movimiento divergente, la mano derecha hacia la derecha y la mano izquierda hacia la izquierda).

GB-B1-6: "Pero en los negativos pongámoslo, así, 0, –4, –3, –2 y –1" (Refiriéndose a que ese era el orden de las etiquetas de la parte negativa, del centro hacia la izquierda. Finalmente los ordenaron de la siguiente forma, expresado de derecha a izquierda: –1, –2, –4, 0, 3, 5).

Figura 9

Enunciado del Problema 2 y solución presentada por el Grupo B

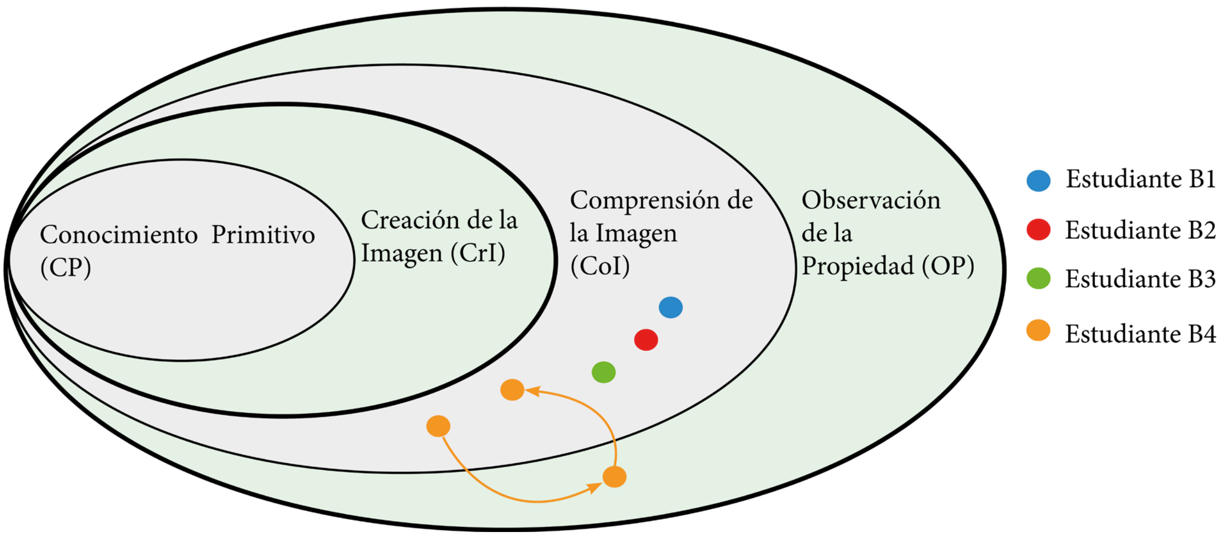


Nota. Elaboración propia.

El estudiante B3 reconoce la recta numérica (ya tiene imágenes mentales sobre eso), lo que lo sitúa en el nivel CoI. Los demás estudiantes, al mostrar comprensión de a qué se refería B3, también se pueden ubicar en el CoI. Por su parte, el estudiante B4 menciona una propiedad de la recta al señalar que los números negativos van a la izquierda y los positivos a la derecha, lo que indica que comprende la imagen y reconoce características de la recta numérica (tiene imagen mental pero también la propiedad), avanzando hacia el nivel OP. Luego, el profesor intentó recordar a los estudiantes que los números negativos también tienen un orden, y que el cero los divide. Sin embargo, los estudiantes no aplicaron el orden correcto de los negativos, porque la relación (propiedad) de orden que sí comprenden en los naturales, claramente no la tienen con los negativos. Como resultado, los estudiantes B1, B2 y B3 se mantienen en el nivel CoI, mientras que el estudiante B4 retrocede al nivel CoI. La Figura 10 presenta esta situación.

Figura 10

Evolución de la comprensión de los miembros del Grupo B al enfrentarse al problema P2



Nota. Elaboración propia.

Ambigüedad de los dos ceros

Como se explicó previamente, esta dificultad se refiere a la dificultad “para pasar de un cero absoluto, un cero que significaba la ausencia de cantidad de magnitud, a un cero origen elegido arbitrariamente” (Cid Castro, 2016, p. 22). Se presentó particularmente durante los intentos de resolver los problemas P5, P6, P7 y P8:

Para los siguientes cuatro problemas, ayúdese con la siguiente recta numérica y realice las sumas de enteros: P5. Realizar –10+8=___ , P6. Realizar –5–2=___, P7. Realizar 8–(–5)=___, P8. Realizar –6+4–2 =___.

El instrumento incluye una imagen clásica de un segmento de recta con flechas en los extremos, con el cero etiquetado al centro, los números del 1 al 10 en color azul a la derecha, y los números del -10 al -1 en color rojo a la izquierda del cero, todos uniformemente espaciados en una escala de -10 a +10. Esto puede verse en la Figura 11.

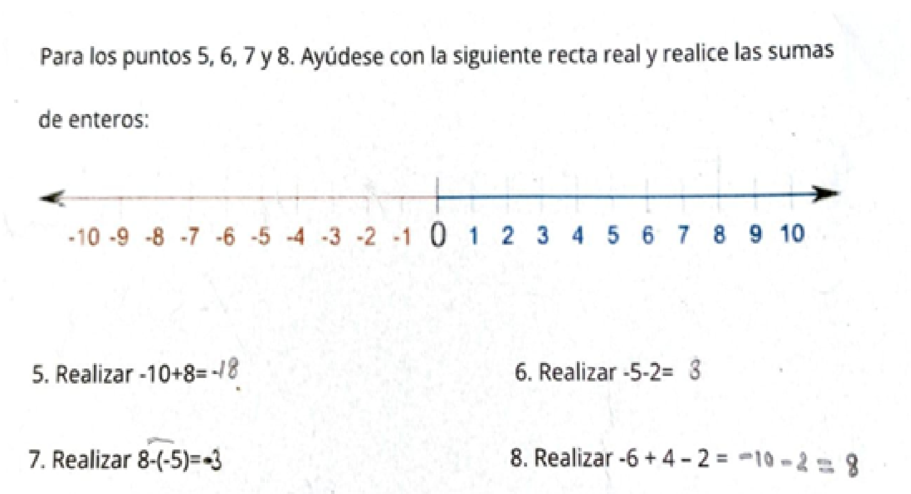
Lo que se esperaba que hicieran los estudiantes era que representaran los números como saltos o desplazamientos (representados como flechas que van de una unidad a la adyacente) hasta detenerse en el número que indica el total de la operación. Sin embargo, los estudiantes de los grupos A (ver Figura 11) y B evadieron usar la recta como puede comprobarse en los siguientes fragmentos de la conversación:

GA-A3-13: "Vaya, ahora el otro [problema]. Está difícil, dice que usemos la recta, pero ya no me acuerdo, hagámoslo sólo sumando" (Los estudiantes no usaron desplazamientos gráficos sobre la recta, sino que los sumaron en su representación simbólica).

GB-B4-12: "En este no usemos la recta, no me acuerdo qué hacer con eso de las flechas en el [problema] 5, 6, 7 y 8" (Proceden igual que el grupo A, descartando cualquier representación gráfica).

Figura 11

Enunciado de los Problema 5 al 8 y solución presentada por el Grupo A


Para los puntos 5, 6, 7 y 8. Ayúdese con la siguiente recta real y realice las sumas de enteros:

-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

5. Realizar -10+8= -18

6. Realizar -5-2= 3

7. Realizar 8-(-5)= -3

8. Realizar -6 + 4 – 2 = -10 - 2 = 8

Nota. Elaboración propia.

En ambos casos, se confirma que todos los sujetos no tienen imágenes mentales suficientes con las cuales trabajar esta situación, por lo que en ese momento todos se ubican en el nivel CrI. Y aunque pareciera que se trata de la dificultad para dar sentido a las cantidades negativas, o la dificultad de unificar la recta real, en realidad se trata de la dificultad de los dos ceros, porque ante la figura con el cero como punto de simetría entre los negativos y los positivos, los alumnos no la comprenden y no pueden trabajar con ella, porque no pueden desprenderse de la concepción del cero como la ausencia de cantidad.

Estancamiento en el estadio de las operaciones concretas

El siguiente fragmento de conversación corresponde al Grupo B al trabajar el problema P9:

P9. La temperatura de un congelador es de –23°C. Si aumenta la temperatura 17°C, ¿Qué temperatura marca ahora el termómetro?

GB-B4-21: "En el [problema] nueve dibujemos el termómetro primero" (Y los cuatro procedieron a dibujar el contorno de un termómetro, pero sin la escala).

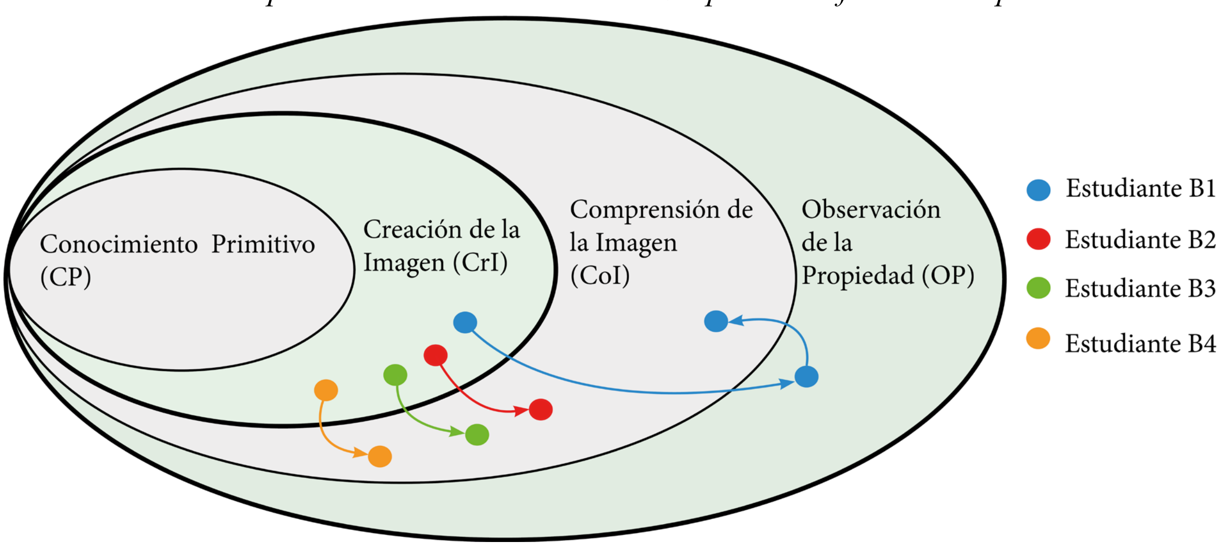
GB-B1-22: "Pero, si aumenta en el termómetro sólo debemos de sumar al termómetro: –23+17=+40".

GB-Prof-23: "En este caso también deben de aplicar la ley de los signos de la suma que se aprendieron y que la maestra les preguntó" (Los estudiantes sabían de memoria la ley de los signos, pero no entendían cuál era el procedimiento para sumar un número negativo con un positivo, y no consideraron el signo del mayor. Luego procedieron como indicó B1, dejando incompleto el dibujo del termómetro, ya que no lograron dibujar la escala).

El estudiante B4, al requerir un dibujo de un termómetro para intentar representar los datos del problema, muestra que no podía relacionar simbólicamente las operaciones ni interpretar mentalmente la situación, lo que lo ubica en el nivel CrI. Los demás estudiantes, al construir en equipo lo que B4 había propuesto, indican requerir también una representación física del termómetro, por lo que también se encuentran en el mismo nivel en ese momento. Sin embargo, el estudiante B1, al expresar una suerte de generalización de la situación, se desplaza al nivel OP, aunque la propiedad enunciada es incorrecta. Después de la intervención del profesor, B1 rechaza lo que dijo el profesor y, al igual que él, los demás estudiantes aceptan la propiedad enunciada, y descartan el dibujo. Con esto parecieran avanzar también a OP, pero en realidad indica, una vez más, que todos no logran razonar y armonizar sus imágenes mentales, aunque sí las tienen, por lo que se desplazan todos hacia CoI en este momento. Este proceso se representa gráficamente en la Figura 12.

Figura 12

Evolución de la comprensión de los miembros del Grupo B al enfrentarse al problema P9



Nota. Elaboración propia.

Conclusiones y discusión

Los resultados de este estudio de caso revelan la presencia de las primeras cinco de las seis dificultades establecidas por Glaeser (1981), las cuales, a pesar de referirse a problemas históricamente superados, persisten en los estudiantes actuales. La dificultad que más prevaleció fue la incapacidad para darle sentido a cantidades negativas, mientras que la que mayor efecto tuvo sobre el estancamiento de la comprensión fue la de la ambigüedad de los dos ceros, ya que esta llevó a varios alumnos a evadir el recurso visual de la recta numérica por considerarlo no interpretable, lo que les impidió tanto resolver problemas adecuadamente como avanzar en su comprensión.

Tal como se esperaba, el análisis de la evolución de la comprensión (por medio del modelo P-K), junto con las observaciones del diario de campo, permitió categorizar las dificultades, que no son directamente observables.

El análisis evidenció a su vez, que las dificultades en el aprendizaje de los números enteros fueron un factor determinante en el estancamiento de la comprensión de los estudiantes de séptimo grado. Esto es particularmente debido a una falta de construcción adecuada de imágenes mentales correctas sobre los números negativos. En definitiva, estas dificultades, intrínsecamente ligadas a imágenes mentales incorrectas y rígidas sobre los números negativos, actuaron como un impedimento para la progresión de la comprensión de los estudiantes y se convirtieron en la raíz del estancamiento observado. Dicho de otra forma, parece que las imágenes mentales incorrectas (o ausentes) provocan las dificultades, y estas provocan el estancamiento en la comprensión.

A pesar de las intervenciones del profesor-investigador, los estudiantes consistentemente rechazaron las correcciones. Esta resistencia impidió que ocurrieran los redoblados (folding back) –mecanismo esencial para la reestructuración de la comprensión– ya que los estudiantes no modificaron sus imágenes mentales incorrectas sobre los números negativos, sus propiedades y operaciones, lo que incluía sus representaciones gráficas. Como resultado, su comprensión se mantuvo superficial, estancada predominantemente en el nivel CoI (Comprensión de la Imagen), debido principalmente a la incapacidad de reflexionar y armonizar imágenes mentales conflictivas. También se observó que los estudiantes bajo análisis no avanzaron más allá del nivel OP (Observación de la Propiedad), es decir, el cuarto nivel. Se observó, además, que las propiedades que los estudiantes alcanzaron a generalizar en el nivel OP, eran incorrectas.

La característica clave en el análisis de resultados tradicional según el modelo P-K es que, normalmente, este modelo se enfoca en evaluar cómo los estudiantes reconstruyen exitosamente su comprensión a través de niveles cada vez más elevados (Navas-López, 2022; Thom y Pirie, 2006). Sin embargo, en este caso, el análisis se realizó principalmente a partir de respuestas incorrectas, lo que obligó a replantear cómo se debían interpretar los resultados. Esta variación en el enfoque de análisis de los datos permitió un entendimiento más profundo de las dificultades que enfrentan los estudiantes y resaltó la necesidad de reforzar contenidos relacionados a los números enteros.

Un hallazgo relevante fue la observación de que cuando uno de los estudiantes afirmaba una idea con seguridad, llevaba a que otros la secundaran sin cuestionamiento, a pesar de contradecir imágenes mentales previamente establecidas. Esta dinámica, aunada a la consistente negativa de los estudiantes a aceptar las correcciones del profesor, se alinea con la perspectiva de Dweck (2006) sobre la mentalidad fija (fixed mindset) en el aprendizaje. Dweck (2006) argumenta que los estudiantes que rechazan las correcciones o no las aceptan como parte del proceso de aprendizaje tienden a limitar su desarrollo académico. La literatura respalda que las mentalidades fijas en matemáticas se asocian con un rendimiento inferior y dificultades en el aprendizaje y logro general, impactando la confianza y motivación (Uwerhiavwe, 2023). Esto podría explicar por qué varios estudiantes secundaron, sin cuestionar, las imágenes mentales equivocadas de sus compañeros que sí se expresaron abiertamente, y por qué desoyeron las observaciones y correcciones del profesor.

Este trabajo ha permitido identificar las dificultades cognitivas que enfrentan los estudiantes en el aprendizaje de los números negativos. Sin embargo, es fundamental reconocer algunas limitaciones y considerar los pasos futuros para abordar estos desafíos. Una de las principales limitaciones de este estudio es el tiempo restringido para la realización del examen. El tiempo asignado por la institución fue muy escaso como para reflexionar más profundamente sobre los problemas y las imágenes mentales equivocadas de los estudiantes.

El siguiente paso en el ciclo de esta investigación-acción, consiste en desarrollar e implementar estrategias efectivas para superar las dificultades identificadas, así como fomentar el paso de una mentalidad fija a una mentalidad de crecimiento en los estudiantes. Esto implica diseñar actividades que ayuden a los estudiantes a construir imágenes mentales más claras de los números negativos, su ubicación en la recta numérica, sus propiedades y operaciones. Es crucial trabajar en enfoques pedagógicos que permitan superar los obstáculos provocados por la enseñanza tradicional de los números naturales y los modelos concretos, y que faciliten una comprensión más profunda y significativa de estos conceptos, como por ejemplo la propuesta de Cid Castro (2016), que desarrolló una orientación para la enseñanza de los números negativos, tras realizar un análisis de los obstáculos epistemológicos que enfrentan los estudiantes al abordar este concepto.

Referencias bibliográficas

Aponte Bello, P. A. y Rivera Martínez, M. A. (2017). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del número entero presentadas en un objeto virtual de aprendizaje* [Tesis de licenciatura, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. http://hdl.handle.net/11349/12897

Arenas-Peñaloza, J., Silvera-Sarmiento, A., Rodríguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vásquez, F. M., Navarro-Yepes, N. y Iguarán Jiménez, A. M. (2024). Analysis of primary school students' process of understanding about the concept of ratio: A view from the Pirie-Kieren theory. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *20*(12), em2542. https://doi.org/10.29333/ejmste/15656

Bermeo Muñoz, A. M. y Torres Daza, G. M. (2022). *Dificultades en el aprendizaje de los números enteros y el modelo de aprendizaje basado en juegos* [Tesis de licenciatura, Universidad del Cauca]. http://repositorio.unicauca.edu.co:8080/xmlui/handle/123456789/6269

Bofferding, L. y Wessman-Enzinger, N. (2017). Subtraction involving negative numbers: Connecting to whole number reasoning. *The Mathematics Enthusiast*, *14*(1-3), 241-262. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1396

Bruno, A. (2001). La enseñanza de los números negativos: formalismo y significado. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *4*(1), 415-427. http://dmle.icmat.es/pdf/GACETARSME_2001_04_2_05.pdf

Bruno Castañeda, A. y García Alonso, I. (2021). Un estudio sobre modelos de enseñanza de los números negativos en la formación de futuros profesores de secundaria. FPIEM: *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, *1*(13), 61-74. https://wp.ull.es/fpiem/wp-content/uploads/sites/158/2023/07/03-index.-Bruno-Garcia-VolXIII-Rev.pdf

Carmona Correa, M. C. (2020). *La enseñanza del concepto de paralelismo y perpendicularidad mediante la implementación de un proyecto de aula* [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/78753

Castillo Angulo, C. (2014). *Aprendizaje de adición y sustracción de números enteros a través de objetos físicos* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/53070

Cid Castro, M. E. (2016). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos* [Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza]. https://zaguan.unizar.es/record/112529

Colás Bravo, M. P. y Buendía Eisman, L. (Eds.). (1994). *Investigación Educativa*. Alfar.

Dirección Nacional de Evaluación Educativa. (2023). *Informe de resultados AVANZO 2023*. Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología. https://www.mined.gob.sv/evaluacion/publicaciones/2023/VF_Informe de Resultados AVANZO 2023.pdf

Dweck, C. S. (2006). *Mindset: The new psychology of success*. Random house.

Fernández Carreira, C. (2013). *Principales dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. Pautas para maestros de Educación Primaria* [Tesis de licenciatura, Universidad Internacional de La Rioja]. https://reunir.unir.net/handle/123456789/1588

Fuadiah, N. F., Suryadi, D. y Turmudi, T. (2017). Some Difficulties in Understanding Negative Numbers Faced by Students: A Qualitative Study Applied at Secondary Schools in Indonesia. *International Education Studies*, *10*(1), 24-38. https://doi.org/10.5539/ies.v10n1p24

George, L. y Voutsina, C. (2023). Children engaging with partitive quotient tasks: Elucidating qualitative heterogeneity within the Image Having layer of the Pirie–Kieren model. *Mathematics Education Research Journal*, *36*(3), 577-607. https://doi.org/10.1007/s13394-023-00461-1

Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *2*(3), 303-346. https://revue-rdm.com/1981/epistemologie-des-nombres-relatifs/

Goldin, G. A. (2000). A Scientific Perspective on Structured, Task-Based Interviews in Mathematics Education Research. En A. E. Kelly, & R. A. Lesh (Eds.) *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 517–546). Routledge.

Maca Díaz, A. J. y Patiño Giraldo, L. E. (2016). La enseñanza de los números enteros un asunto sin resolver en las aulas. *Plumilla Educativa*, *17*(1), 194-210. https://doi.org/10.30554/plumillaedu.17.1756.2016

Medina Carruitero, F. E. (2014). *Análisis de la organización matemática referida a los números enteros presente en libros de texto y su relación con las dificultades presentadas por los estudiantes de primer año de secundaria* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. http://hdl.handle.net/20.500.12404/5494

Mena Ayala, J. A. (2021). *Obstáculos epistemológicos que poseen los estudiantes del grado séptimo en la adición de números enteros negativos: un estudio de casos*. [Tesis de licenciatura, Universidad Autónoma de Manizales]. https://repositorio.autonoma.edu.co/handle/11182/1211

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología. (2019). *ESMATE*. Consultado el 20 de enero de 2025. https://www.mined.gob.sv/esmate/

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología. (2023). *AVANZO para superarme*. Consultado el 19 de abril de 2024. https://www.mined.gob.sv/avanzo/index_2023.html

Navas-López, E. A. (2022). Comprensión del Concepto de Equivalencia Lógica a través del Modelo de Pirie y Kieren. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *35*(1), 158-170. https://alme.org.mx/revista/index.php/alme/article/view/61

Orrantia, J. (2006). Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva evolutiva. *Revista psicopedagogía*, *23*(71), 158-180. https://www.revistapsicopedagogia.com.br/detalhes/401/dificultades-en-el-aprendizajede-las-matematicas--una-perspectiva-evolutiva

Pirie, S. y Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2-3), 165–190. https://doi.org/10.1007/BF01273662

Siegler, R. S. (2022). Development of Numerical Knowledge. En O. Houdé & G. Borst (Eds.), *The Cambridge Handbook of Cognitive Development* (pp. 361-382). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/9781108399838.020

Thom, J. S. y Pirie, S. E. B. (2006). Looking at the complexity of two young children's understanding of number. *Journal of Mathematical Behaviour*, *25*(3), 185–195. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.09.004

Uwerhiavwe, A. A. (2023). The Influence of Learners' Mindsets on Their Mathematics Learning. *Creative Education*, *14*(01), 74-102. https://doi.org/10.4236/ce.2023.141007

Wright, V. (2014). Frequencies as proportions: Using a teaching model based on Pirie and Kieren's model of mathematical understanding. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(1), 101-128. https://doi.org/10.1007/s13394-014-0118-7