



## Análisis de Organizaciones Matemáticas en torno a la Gráfica de Funciones en Libros de Referencia en Costa Rica y Honduras

### Analysis of Mathematical Organizations around the Graph of Functions in Reference Books in Costa Rica and Honduras

Uzzy Merary Turcios Carrasco<sup>a,\*</sup>, Flavia María Romero Camacho<sup>b</sup>, Andrea María Araya Chacón<sup>c</sup>

<sup>a</sup> umturcios@upnfm.edu.hn. Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Honduras. <https://orcid.org/0000-0002-6777-0689>

<sup>b</sup> fromero@upnfm.edu.hn. Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Honduras. <https://orcid.org/0000-0003-3588-0522>

<sup>c</sup> andrea.arayachacon@ucr.ac.cr. Universidad de Costa Rica. <https://orcid.org/0000-0001-7646-4512>

*Un análisis de la actividad matemática y didáctica en torno a la representación gráfica de funciones en un curso para futuros docentes de matemática en Costa Rica y Honduras. Proyecto financiado por el Fondo de Apoyo a la Investigación. UPNFM.*

---

#### Resumen

Este documento muestra un extracto de un proyecto de investigación que involucró el análisis de la actividad matemática en torno a la enseñanza del tema “graficación de funciones”, en un curso para futuros docentes de matemáticas en Costa Rica y Honduras. Se hace énfasis en las Organizaciones Matemáticas (OM) presentes en el libro de texto de referencia utilizado en los cursos Álgebra II, Introducción a las Funciones e Introducción a la Matemática. Para realizar el análisis se hace uso de las herramientas que proporciona la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Dentro de los principales hallazgos resaltamos que se identificaron los mismos tipos de tarea en ambos libros de texto, sin embargo, existe una diferencia significativa en el desarrollo de las técnicas. En cuanto al bloque tecnológico-teórico, resaltamos que se muestra impactado por las condiciones institucionales.

*Palabras clave:* TAD, organización matemática, transformación de gráficas en el plano, libros de referencia, formación inicial de docentes.

---

\* Autor para correspondencia

<https://doi.org/10.5377/paradigma.v29i47.14462>

Recibido 15 de diciembre de 2021 | Aceptado 23 de marzo de 2022

Disponible en línea 30 de junio de 2022

2022 Paradigma: Revista de Investigación Educativa | ISSN 1817 - 4221 | EISSN 2664 - 5033 | CC BY-NC-ND 4.0

### Abstract

This paper shows an excerpt of a research project that involved the analysis of the mathematical activity around the teaching of the topic "Graphing functions" in a course for future mathematics teachers in Costa Rica and Honduras. Emphasis is placed on the Mathematical Organizations (MO) present in the reference textbook used in the courses Algebra II, Introduction to Functions and Introduction to Mathematics. To carry out the analysis, use is made of the tools provided by the Anthropological Theory of Didactics (TAD). Among the main findings, we highlight that the same types of tasks were identified in both textbooks; however, there is a significant difference in the development of the techniques. As for the technological-theoretical block, we highlight that it is impacted by institutional conditions.

*Keywords:* TAD, mathematical organizations, transformation of graphs in the plane, reference books, initial teacher training.

### Introducción

La actividad matemática y didáctica en el aula de clases debe someterse continuamente a procesos de revisión, análisis, y evaluación; de manera que exista la reflexión permanente de las prácticas educativas y decisiones que toma el profesor para llevar a cabo la actividad escolar. La Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard (TAD), brinda una herramienta que permite analizar la actividad matemática y didáctica para un objeto matemático. En este artículo se muestra el análisis del libro de referencia utilizado en la enseñanza del tema "graficación de funciones", en cursos de formación inicial de profesores en Costa Rica y Honduras.

El objeto matemático que se analizó en los libros de referencia es la "graficación de funciones"; según la experiencia docente de las investigadoras, trazar la gráfica de una función es un tipo de tarea muy útil para resolver problemas y situaciones, por ejemplo: cuantificar una dependencia, optimizar, describir fenómenos, representar situaciones, interpolar, extrapolar, calibrar, modelizar, etc. Agregado al criterio de las investigadoras, existen investigaciones que resaltan la importancia de la graficación de funciones, Font (2001) realizó una investigación que se centró en la importancia de las traducciones entre diferentes representaciones, afirma que:

Cada una de las cuatro formas de representar una función tiene una génesis histórica diferente y, por lo tanto, un estudio histórico de los métodos y procedimientos que se han utilizado para calcular la expresión analítica a partir de gráficas. (p. 184)

En el párrafo anterior, se muestra la relevancia del objeto matemático a partir de su evolución histórica. Además, Font (2001) muestra un ejemplo de tarea que consiste en proporcionarle al estudiante la gráfica de una función trigonométrica en el plano cartesiano, se le solicita que escriba la ecuación que define a la gráfica de la función; el estudiante tiene que utilizar sus conocimientos

de funciones trigonométricas, la relación entre las variaciones de los parámetros y las variaciones de las gráficas. Existen dificultades para resolver con éxito esta tarea porque existen escasas actividades de esta naturaleza en el pasado didáctico de los estudiantes, no se estudian las funciones como miembros de familias de funciones, y se trabajó muy poco en las transformaciones de las funciones. (Font, 2011, p. 188).

Otra evidencia de la relevancia de la graficación de funciones se encuentra en un documento del IREM de Poitiers, en Francia. Los IREM son institutos de investigación sobre la enseñanza de la matemática. Minet (2008) menciona que:

El análisis y en particular la noción de función se ha introducido en la enseñanza porque es una noción central para estudiar los fenómenos “naturales”. El corpus enseñado por los profesores de matemáticas incluía matemáticas mixtas y daba razón de ser y espacio vital a técnicas vinculadas a funciones. (p. 104)

A partir de los aportes de Font y Minet, se deduce que el objeto matemático graficación de funciones, tiene una riqueza histórica y didáctica que es necesario estudiar e investigar. En este documento se analiza el libro de referencia en un curso de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán (UPNFM) de Honduras, y de dos cursos de la Universidad de Costa Rica (UCR). Para iniciar el proceso, se identificaron las organizaciones matemáticas (OM) relacionadas a la graficación de funciones, se construyó y aplicó un instrumento para analizar las OM y finalmente se compararon las OM identificadas, haciendo un contraste entre el libro utilizado en Costa Rica y Honduras. El instrumento para el análisis de las OM, se construyó a partir de los criterios propuestos por Chevallard (1999) y los criterios de completitud de una OM según Fonseca (2004).

### **Discusión Teórica**

El enfoque antropológico de lo didáctico nace dentro del marco general de la llamada Didáctica Fundamental, iniciada por Guy Brousseau en la década de los años setenta; misma que surge después de una ampliación de la problemática didáctica, que incorpora el conocimiento matemático como objeto primario de investigación. Se distingue por considerar la actividad matemática como una más entre todas aquellas actividades que realiza el ser humano. En este sentido, propone un modelo de las matemáticas escolares y un modelo del estudio de la matemática escolar, entendidas ambas como actividades institucionales.

### **Praxeología Matemática**

El enfoque antropológico establece que la actividad matemática debe ser interpretada (esto es, modelizada) como una actividad humana junto a las demás; en lugar de considerarla únicamente como la construcción de un sistema de conceptos, como la utilización de un lenguaje o como un proceso cognitivo (Gascón, 1998). Este modelo de la actividad humana, en específico la Matemática y la Didáctica, se basa en tres postulados fundamentales de las prácticas regularmente realizadas.

De acuerdo con Bosch y Chevallard (1999), se tiene:

Un primer postulado, según el cual, toda práctica institucional permite su análisis desde diferentes puntos de vista y de diferentes maneras, a partir de un sistema de tareas relativamente bien constituidas, que se delimitan en el flujo de la práctica. (p. 84)

La noción de tarea ( $t$ ) empleada en la TAD, revela una acepción amplia. Corresponde a una acción aplicada a un objeto relativamente específico. Así, demostrar que la multiplicación es cerrada, conmutativa y asociativa en  $\mathbb{N}$ , resolver la ecuación  $x^2 + 10x - 39 = 0$ , calcular el resultado de  $4 + 2(5 \cdot 7 + 4(9 \div 3 \cdot 6))$ , estimar el área del jardín de mi casa, cantar el himno nacional de Honduras, bañar a mi mascota Lulú, abrir la puerta de mi oficina en mi trabajo, etcétera; son ejemplos de tareas.

Cuando las tareas precisan el objeto sobre el cual se llevará a cabo la acción, pero no lo particularizan, se denominan tipos de tareas ( $T$ ). Así, un tipo de tareas es un conjunto de tareas “de la misma familia”. Según los ejemplos anteriores, se tendría: demostrar propiedades de la multiplicación en  $\mathbb{N}$ , resolver una ecuación, calcular el resultado de operaciones numéricas, estimar el área de un jardín, cantar el himno nacional, bañar a mi mascota, abrir la puerta de una oficina, etcétera.

La noción de tarea está restringida por “el segundo postulado, que supone que la realización de toda tarea resulta de la puesta en práctica de una técnica” (Bosch y Chevallard, 1999, p. 84). Este concepto también se utiliza según una acepción amplia, es decir, técnica ( $\tau$ ) no se refiere únicamente a una secuencia algorítmica de pasos; si no en general a una “forma de hacer” (según su raíz griega *technê*, saber hacer), alguna “manera de llevar a cabo” algo. Por ejemplo, para la tarea enunciada anteriormente: resolver la ecuación  $x^2 + 10x - 39 = 0$ , se tienen al menos tres técnicas: usando división sintética, usando la fórmula general o factorizando por medio de ensayo y error.

De acuerdo con Chevallard (1999), el carácter institucional de las técnicas, y su relatividad al tipo de tareas al cual está asociada, permite asegurar que “Una técnica -una “manera de hacer”- no tiene éxito más que sobre una parte  $P(T)$  de las tareas del tipo  $T$  a la cual es relativa, parte que se denomina alcance de la técnica” (p. 225). Así, por ejemplo, para la tarea: factorizar el polinomio  $27x^3 - 8$ , la técnica que emplee productos notables implicará una “forma de hacer” eficiente para realizar la tarea, sin embargo, para tareas del mismo tipo, que involucren polinomios como  $x^3 - 4x + 1$ , no podrán realizarse con la misma técnica. Se dirá entonces que, la técnica tiene un alcance limitado, al excluir las tareas que involucren dichas expresiones algebraicas.

En el sentido anterior, se entenderá que una técnica es superior a otra, si su alcance es mayor. La técnica que involucra el teorema de los ceros racionales de un polinomio tendrá mayor alcance que la que moviliza los productos notables.

Finalmente, aún si existen varias técnicas para realizar un mismo tipo de tareas, en una institución en particular, existe o se oficializa solo una o un grupo reducido de ellas.

El par o bloque técnico-práctico [ $T/\tau$ ] habitualmente se reconoce como el saber hacer, se refiere a la práctica o a la praxis de la actividad.

El tercer postulado antropológico corresponde a la ecología de las tareas y de las técnicas, es decir, a las condiciones y las limitaciones que permiten la producción y la utilización de las técnicas y los tipos de tareas a las cuales se refieren: “suponemos que, para poder existir en una institución, una técnica debe aparecer como comprensible, legible y justificada” (Chevallard, 1999, p. 86). Es decir, un discurso justificativo, interpretativo - explicativo de la técnica, y de su ámbito de aplicabilidad o validez, deberá encontrarse en el entorno de tal técnica. A este discurso, se le conoce con el nombre de tecnología,  $\theta$  (de teckhnê, y logos, discurso).

Según Bosch y Chevallard (1999), el tercer postulado también implica la existencia de un discurso justificador, explicativo y productor de tecnologías. En otras palabras, la tecnología de la tecnología. Este nuevo discurso se denomina teoría,  $\Theta$ . Como indica Gascón (1998):

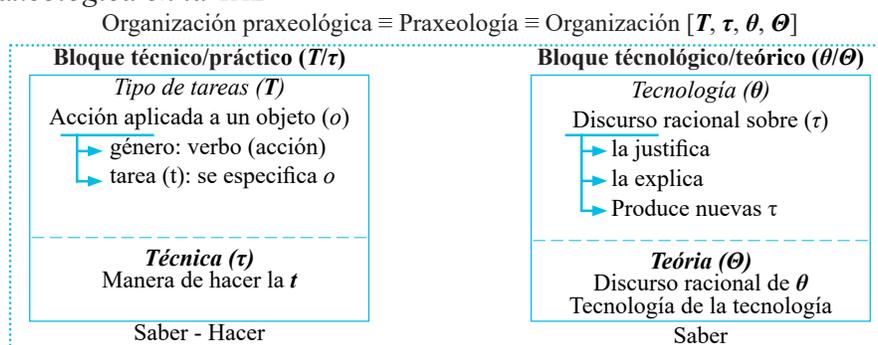
Mientras que la tecnología asociada a una técnica tiende a ocupar una posición cercana a ésta y aparece con cierta frecuencia en las prácticas matemáticas en las que se utiliza dicha técnica, la teoría, por el contrario, suele mantenerse a mayor distancia de la práctica matemática, y acostumbra a estar “ausente” de la misma. (p. 22)

Chevallard (1999) menciona que sin importar el tipo de tareas que se esté desarrollando, y la institución en la que se realiza, siempre existirá un *embrión* de tecnología. Es muy frecuente encontrar elementos tecnológicos integrados en la propia técnica, y si esta técnica es reconocida como la única “manera de hacer” las tareas correspondientes en la institución, se le confiere la cualidad de *autotecnología*.

Estos dos elementos, tecnología y teoría, forman conjuntamente un par o bloque conocido como tecnológico-teórico [ $\theta, \Theta$ ]. Define el logos de la praxis; praxis y logos constituyen el “saber”. La articulación de la praxis y el logos, da forma a lo que Chevallard (1999) denomina una organización praxeológica, o tan solo *praxeología* u organización [ $T, \tau, \theta, \Theta$ ]. Cuando el tipo de tareas es de naturaleza matemática, la llamaremos *organización matemática* (OM), ver Figura 1 (Adaptado de Araya, 2017).

**Figura 1**

*Organización praxeológica en la TAD*



*Nota.* Adaptado de Araya (2017).

## Completitud de Organizaciones Matemáticas Locales

De acuerdo con [Chevallard \(1999\)](#), es poco habitual que en las instituciones se estudien OM puntuales (en torno a un solo tipo de tareas). Hay una tendencia a encontrar organizaciones matemáticas locales (OML), es decir, aquellas praxeologías en torno a diferentes tipos de tarea, pero que comparten una misma tecnología. [Fonseca \(2004\)](#) afirma que el grado de completitud de una OML estará determinado por cuánto se satisfagan las siguientes condiciones, a lo largo de un proceso de construcción:

- OD1. Debe haber un primer encuentro con un tipo de tareas matemáticas  $T_q$  asociado a una cuestión matemática.
- OD2. Debe contener momentos exploratorios en los que se tenga la oportunidad de construir y empezar a utilizar una técnica inicial útil para realizar las tareas del tipo  $T_q$ .
- OD3. Debe converger en un verdadero trabajo de la técnica que se inicia estableciendo una rutina para la misma hasta provocar un desarrollo progresivo de dicha técnica.
- OD4. Deben aparecer nuevas cuestiones matemáticas relativas a la interpretación, la justificación, y el alcance de las técnicas, así como a las relaciones que se establecen entre ellas (denominamos “cuestionamiento tecnológico” al conjunto de estas cuestiones).
- OD5. Debe institucionalizarse progresivamente (no de una vez por todas) aquellos elementos que deben ser considerados como “matemáticos” por la comunidad de estudio, para distinguirlos de los ejercido como instrumentos auxiliares de la construcción.
- OD6. Se debe evaluar la calidad de los componentes de la OML construida.

Esto converge al establecimiento de *indicadores* de completitud de una organización matemática local, que [Fonseca \(2004\)](#) describe de la siguiente manera:

- OML1. Integración de los tipos de tareas y existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico. Una OML será menos completa cuantos más tipos de tareas aisladas tenga, es decir tareas, realizables mediante técnicas que no estén relacionadas entre sí por ningún elemento tecnológico.
- OML2. Diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas. Una OML será más completa en la medida que, dado algún tipo de tareas de la OML, existan dos o más técnicas para realizarlas, y existan los elementos tecnológicos que permitan discernir, cuál es la técnica más fiable y económica para llevar a cabo dicho tipo de tarea.
- OML3. Independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas: una OML será más completa si las técnicas no se identifican rígidamente con los objetos ostensivos en el sentido definido en [Bosch \(1994\)](#) que las componen, sino que, acepten diferentes representaciones ostensivas dependiendo de la actividad matemática en la que están inmersas y hasta de la tarea específica abordada dentro de un tipo de tareas.
- OML4. Existencia de tareas y de técnicas “inversas”. Otro indicador de la flexibilidad de las técnicas y, por lo tanto, del grado de completitud de la OML, lo proporciona el hecho de que existan técnicas inversas que permitan realizar las tareas también “inversas”.

- OML5. Interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar las técnicas: En la medida que una OML sea más completa, se cumplirá que, para cada técnica  $\tau$  de OML, existirá en OML el tipo de tareas consistente en interpretar el funcionamiento y el resultado de aplicar  $\tau$  para realizar una tarea o un tipo de tareas de OML
- OML6. Existencia de tareas matemáticas “abiertas”: una OML será más completa en la medida que existan tipos de tareas matemáticas “abiertas”, esto es, tipos de tareas matemáticas en los que los datos y las incógnitas no están prefijados completamente de antemano, se incluyen en este tipo las tareas de modelización matemática.
- OML7. Integración de los elementos tecnológicos e incidencia sobre la práctica: cada OML viene caracterizada por una tecnología,  $\theta$ . El grado de completitud de OML dependerá también del grado de integración interna de los elementos tecnológicos y de la incidencia efectiva de  $\theta$  sobre la práctica matemática que se lleva a cabo con las tareas y las técnicas de OML. Un indicador importante del grado de completitud de OML es la medida en que  $\theta$  permita construir técnicas nuevas, capaces de ampliar los tipos de tareas de OML.

### **Métodos y Materiales**

La investigación que se realizó en este proyecto es de naturaleza cualitativa, haciendo énfasis en el estudio de casos por su ventaja epistemológica. [Durán \(2012\)](#) expone que:

El Estudio de Caso en la Investigación Cualitativa es un proceso de indagación focalizado en la descripción y examen detallado, comprensivo, sistemático, en profundidad de un caso definido, sea un hecho, fenómeno, acontecimiento o situación particular. El análisis incorpora el contexto (temporo-espacial, económico, político, legal), lo que permite una mayor comprensión de su complejidad y, por lo tanto, el mayor aprendizaje del caso particular. (p. 128)

Este proceso de análisis de la problemática a partir del estudio de caso, es el que mejor se ajusta a la investigación mostrada en este documento, pues incluye técnicas como la revisión de textos, la observación y la entrevista; y uno de los objetivos del proyecto es el análisis de libros de referencia en cursos de formación de profesores en dos universidades de la región Centroamericana.

A continuación, se describen las etapas que se siguieron para realizar el proyecto de investigación.

#### **Etapas 1: Un Modelo de Actividad Matemática y Didáctica**

Durante la primera etapa se construyó un marco teórico consensuado entre las investigadoras, a partir del estudio de dos tipos de referencias: aquellas relativas a la presentación de conceptos esenciales de la TAD, y otras correspondientes a artículos de divulgación científica, cuyas investigaciones involucran, como parte de sus objetivos, el análisis de la actividad matemática o didáctica de alguna noción matemática, haciendo uso de herramientas que ofrece la TAD.

En esta etapa se construyó un marco epistemológico de referencia, a partir del estudio histórico desarrollado en la memoria escrita del proyecto titulado *Análisis de una transposición didáctica del saber transformaciones de gráficas de funciones en el plano en la secundaria costarricense*, este trabajo fue realizado por Manning et al. (2019) bajo la dirección de Andrea Araya Chacón, el tema surgió como un vínculo y extensión de este proyecto de investigación.

Se analizó la ruta elaborada en Manning et al. (2019) para reconstruir los saberes sabios, graficación de funciones y transformaciones en el plano, para detectar las organizaciones matemáticas de referencia, que conforman una guía de la posible actividad matemática a desarrollar en los cursos universitarios seleccionados. Dicha guía se complementa con otras rutas que la referencia de base no había considerado.

### Etapa 2: Construcción de un Modelo Epistemológico de Referencia

En esta segunda etapa se construyó un modelo epistemológico de referencia (MER) en torno a la graficación de funciones y se adaptó ese modelo a las instituciones educativas en estudio. Estas instituciones se seleccionaron por acuerdo de las investigadoras, según el centro de educación superior donde laboran. Se seleccionaron tres cursos básicos de funciones en la formación inicial de futuros docentes de Matemáticas, los cuales se describen en la Tabla 1.

**Tabla 1**

*Carreras y cursos de los estudios de casos*

País	Costa Rica		Honduras
<b>Universidad</b>	Universidad de Costa Rica	Universidad de Costa Rica	Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán
<b>Carrera</b>	Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática	Bachillerato y Licenciatura en Educación Matemática	Profesorado en matemática en el grado de Licenciatura
<b>Curso</b>	MA-0123 Introducción a la matemática	MA-0005 Introducción a las Funciones	EMA-1103 Álgebra II

### Etapa 3: Análisis de Libros de Texto

La descripción de la actividad matemática propuesta en un libro de referencia, para los estudiantes en formación inicial, proporciona un primer acercamiento a lo que podría concretarse en las prácticas efectivas en torno a la graficación de funciones. Los textos seleccionados para cada programa de formación, en los cursos indicados en la sección anterior fueron los siguientes:

**Tabla 2**

Libro de texto analizado para cada estudio de caso

País	Costa Rica	Honduras
<b>Autores</b>	Floria Arias Tencio Hugo Barrantes Campos	Earl W. Swokowski Jeffery A. Cole
<b>Año</b>	2010	2009
<b>Título</b>	Introducción a la matemática formal desde las funciones	Álgebra y trigonometría con geometría analítica
<b>Editorial</b>	Editorial de la Universidad de Costa Rica	Grupo Editorial Cengage Learning

Para analizar estos artefactos (Goetz y LeCompte, 1988), primero se identificaron las organizaciones matemáticas en cada libro de texto. Para ello, se reconocieron las tareas matemáticas propuestas; seguido, se agruparon en torno a un mismo tipo de tareas. Para estos, se identificaron las formas, explícitamente expuestas en los textos, de llevar a cabo las tareas. Análogamente, se procedió con los elementos tecnológico-teóricos de las técnicas. Se remarcó que, los elementos justificadores y explicativos de las formas de realizar las tareas, se trataron como un bloque; es decir, no se marca la diferencia entre lo tecnológico y lo teórico. Esta postura se toma, dada la ausencia de elementos teóricos que, normalmente, se reconocen en temáticas básicas como graficación de funciones.

A partir del marco teórico elaborado en la primera etapa, se consensuaron criterios para la construcción de una guía de análisis de la actividad matemática, para analizar los libros de texto. Las dos fuentes principales para esta tarea son la sección de evaluación de una OM en Chevallard (1999) y los indicadores de completitud de una organización matemática local, propuestos por Fonseca (2004) en su tesis de doctorado. En una segunda etapa se analizó cada uno de los libros según los criterios y se hizo un contraste comparando los dos libros de referencia.

### Resultados

En esta sección se presenta el análisis de los libros de texto utilizados en la UPNFM y la UCR para la temática “graficación de funciones”. En las tablas 3, 4 y 5 se muestran los criterios que guiaron el análisis. Se identificaron con base en la simbología de las OM, por ejemplo,  $CT_1$  es el criterio 1 para el análisis de tipos de tarea,  $CT_2$  es el criterio 2 para el análisis de las técnicas, similarmente para los criterios en las tecnologías. Para indicar que un criterio está presente en la OM, se utiliza la letra P caso contrario se utiliza NP.

**Tabla 3**

*Comparación del grado de completitud de la OML en cuanto a tipos de tareas identificadas en el libro de texto*

Criterios por elemento de OM <i>Los tipos de tarea en torno a las transformaciones de gráficas de funciones:</i>	Honduras		Costa Rica	
	P	NP	P	NP
$CT_1$ Explicitan su propósito para el aprendizaje de la graficación de funciones.	X		X	
$CT_2$ Se relacionan explícitamente con el resto de la actividad matemática y extramatemática de los alumnos.	X		X	
$CT_3$ Están relacionadas entre sí por medio de algún elemento tecnológico.	X		X	
$CT_4$ Tienen asociado una tarea inversa.	X		X	
$CT_5$ Incluyen tareas relativas al cuestionamiento tecnológico.	X			X
$CT_6$ Incluyen algunas que permitan interpretar los resultados que se obtienen al aplicar una técnica.	X			X
$CT_7$ Incluyen tareas abiertas.	X		X	

Para “los tipos de tarea en torno a las gráficas de funciones” se encontró que en ambos libros de texto se satisfacen los criterios  $CT_1$ ,  $CT_2$ ,  $CT_3$  y  $CT_4$ , evidenciando de esta manera que existe similitud en cuanto a los tipos de tarea. Cabe resaltar que en ambos libros se identificaron dos tipos de tarea, se detallan a continuación:

- **T1:** Trazar la gráfica de una función.
- **T2:** Dada la gráfica de una función determinar algunas de sus características.

Los criterios  $CT_5$  y  $CT_6$ , muestran las diferencias entre ambos libros de texto, ya que en el caso de Honduras existe evidencia de ambos criterios, sin embargo, en el libro de Costa Rica no se encontró evidencia. El criterio  $CT_5$ , hace referencia a incluir tareas relativas al cuestionamiento tecnológico, en el caso de Honduras solo se encontró una evidencia de este criterio, lo que muestra una escasa cantidad de tareas relacionadas a  $CT_5$ .

Para dar un ejemplo del tipo de análisis realizado en los libros de referencia, se muestra evidencia en la Figura 2, de una tarea relativa al cuestionamiento tecnológico encontrada en el libro de texto de Honduras. Para construir la gráfica de la función valor absoluto, se hace uso de la definición del valor absoluto, el lector debe identificar que para  $x \geq 0$  debe graficar en el primer cuadrante la porción de la gráfica  $y = x$ , luego haciendo uso de los conceptos de paridad, función lineal y simetría, se traza la porción de recta correspondiente en el segundo cuadrante. Haciendo uso de estos elementos tecnológicos de los

que el estudiante dispone, se obtiene el primer registro visual de la gráfica de la función valor absoluto, y por lo tanto un nuevo elemento tecnológico. El autor del libro tiene toda la intención de hacerle ver al lector el porqué de la forma de la gráfica de una función valor absoluto, algo de lo que no se habría dado cuenta si se presenta la forma de la gráfica como un argumento tecnológico que hay que aprender y utilizar.

## Figura 2

Ejemplo que muestra la existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico

### EJEMPLO 2 Trazar la gráfica de la función de valor absoluto

Sea  $f(x) = |x|$ .

- Determine si  $f$  es par o impar.
- Trace la gráfica de  $f$ .
- Encuentre los intervalos en los que  $f$  es creciente o es decreciente.

### SOLUCIÓN

(a) El dominio de  $f$  es  $\mathbb{R}$ , porque el valor absoluto de  $x$  existe para todo número real  $x$ . Si  $x$  está en  $\mathbb{R}$ , entonces

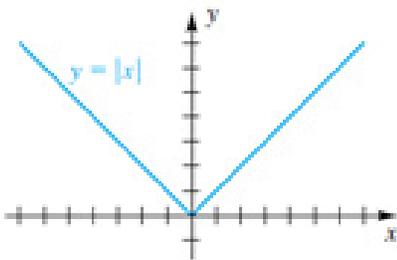
$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x).$$

Por lo tanto,  $f$  es una función par porque  $f(-x) = f(x)$ .

(b) Como  $f$  es par, su gráfica es simétrica con respecto al eje  $y$ . Si  $x \geq 0$ , entonces  $|x| = x$ , y por lo tanto la parte del primer cuadrante de la gráfica coincide con la recta  $y = x$ . Trazar esta semirrecta y usar simetría nos da la figura 1.

(c) Por consulta de la gráfica, vemos que  $f$  es decreciente en  $(-\infty, 0]$  y es creciente en  $[0, \infty)$ . 

Figura 1



*Nota.* Gráfica de la función valor absoluto. Tomado de Swokowski y Cole, 2009, p. 197.

El criterio  $CT_6$  está relacionado con tareas que permitan interpretar los resultados que se obtienen al aplicar una técnica, en el libro de texto utilizado en Honduras de manera transversal hay ejemplos y ejercicios vinculados a una calculadora gráfica, permitiendo de esta manera interpretar resultados que se obtienen al aplicar una técnica, en el caso de Costa Rica no se encontró evidencias de tareas que impliquen interpretar resultados.

En ambos libros de texto se encontró una evidencia escasa del criterio  $CT_7$ . Para el caso de Honduras, no se desarrolló ejemplos en la categoría “*tareas abiertas*”, solo se muestran dos ejercicios propuestos al final de la sección, no se explicó una técnica para proceder. En la Figura 3, se puede leer el ejercicio que se solicita resolver a los estudiantes, notar que no hay una única solución a la tarea, y esta es una característica de las tareas abiertas, el lector podría dibujar varias funciones que cumplan con las condiciones solicitadas.

**Figura 3**

*Ejercicio que muestra la existencia de tareas abiertas*

35 Trace la gráfica de una función que sea creciente en  $(-\infty, -3]$  y  $[2, \infty)$  y sea decreciente en  $[-3, 2]$ .

*Nota.* Ejercicio 5, sección 3.4. Tomado de Swokowski y Cole, 2009, p. 191.

Para realizar el análisis de las técnicas mostradas en los libros de texto, se hizo uso de la Tabla 4.

**Tabla 4**

*Comparación del grado de completitud de la OML en cuanto a las técnicas identificadas en el libro de texto*

Criterios por elemento de OM <i>Las técnicas utilizadas para realizar las tareas en torno a las transformaciones de gráfica de funciones:</i>	Honduras		Costa Rica	
	P	NP	P	NP
$C\tau_1$ Se elaboran efectivamente.	X			X
$C\tau_2$ Tienen un alcance satisfactorio (pueden utilizarse para realizar varias tareas).	X		X	
$C\tau_3$ Se relacionan explícitamente con el resto de la actividad matemática y extrematemática de los alumnos.	X		X	
$C\tau_4$ Permiten al estudiante aprender nuevas técnicas para otros contenidos.	X			X
$C\tau_5$ Aceptan diferentes representaciones ostensivas.	X		X	
$C\tau_6$ Tienen técnicas inversas asociadas		X		X
$C\tau_7$ Incluyen diferentes (técnicas) para realizar una misma tarea		X		X

Una diferencia notable entre ambos libros, está relacionada con la forma en que los autores desarrollan las técnicas  $C\tau_j$ , en el caso de Honduras las técnicas se elaboraron efectivamente, caso contrario en Costa Rica, en el que se dejó a criterio del lector la construcción de un gran porcentaje de las técnicas. Los criterios  $C\tau_2$  y  $C\tau_3$  están presentes en ambos libros de texto, es decir, existe un alcance satisfactorio de las técnicas y están relacionadas con el resto de la actividad matemática, sin embargo, cabe resaltar que el criterio  $C\tau_3$  no se cumple en su totalidad en ambos libros, ya que las técnicas no están relacionadas con la actividad extra-matemática de los estudiantes.

En referencia al criterio  $C\tau_4$ , en el libro de texto hondureño se identificaron tareas que permiten al estudiante aprender nuevas técnicas, en cambio en el libro de texto de Costa Rica no se cumple el criterio. Para el criterio  $C\tau_5$ , en ambos libros de texto, las técnicas aceptan diversas representaciones ostensivas, sin embargo, no existen actividades donde el lector deba identificar cual representación ostensiva es más eficaz para llevar a cabo la aplicación de la *técnica*.

Los tipos de tarea T1 y T2 son inversas, y al analizar el libro de texto utilizado en Honduras se encontraron 13 técnicas relativas a T1, y ninguna técnica relativa a T2, esto evidencia que no hay técnicas inversas descritas de manera explícita en el libro de texto y por lo tanto no se cumple el criterio  $C\tau_6$ , similarmente en Costa Rica no se explicitan técnicas inversas, a pesar de que si se encuentra una tarea inversa propuesta.

En las secciones analizadas de los libros de texto no se incluyen diferentes técnicas para realizar una misma tarea, consecuentemente no se cumple el criterio  $C\tau_7$ .

En la tabla 5 se muestra la presencia o no presencia de los criterios en análisis del bloque tecnológico teórico, esta tabla fue muy útil para el análisis de los elementos tecnológicos identificados en ambos libros.

**Tabla 5**

*Comparación del grado de completitud de la OML en cuanto al bloque tecnológico teórico identificadas en el libro de texto*

Criterios por elemento de OM <i>Las tecnologías/teorías en torno a las transformaciones de gráficas de funciones:</i>	Honduras		Costa Rica	
	P	NP	P	NP
$C\theta_1$ Se elaboran efectivamente para justificar de forma explícita cada técnica/tecnología.	X		X	
$C\theta_2$ Son parecidas a las formas propias en matemáticas.	X		X	
$C\theta_3$ Se estudian a través de actividades explícitas de justificación de las técnicas/tecnologías.			X	X
$C\theta_4$ Permiten producir técnicas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas	X		X	
$C\theta_5$ Permiten discernir cuál técnica es más fiable y económica para llevar a cabo una tarea	X		X	

Al hacer la comparación de criterios respecto a las tecnologías identificadas en ambos libros de referencia, se determinó que el criterio  $C\theta_1$  se cumple en los dos, es decir que las tecnologías se elaboran efectivamente para justificar cada técnica, y además son parecidas a las formas propias en matemáticas, cumpliendo así el criterio  $C\theta_2$ , excepto el caso de aquellas técnicas cuyas tecnologías provienen de ámbitos como la geometría.

En referencia al criterio  $C\theta_3$ , en ninguno de los dos libros se encontraron actividades explícitas que permitan la justificación de las técnicas, es decir que las tecnologías solamente se presentan en el libro, pero no hay cuestionamiento de ellas, ni actividades que soliciten al lector justificar un proceder.

En el libro de Honduras se identificaron dos tipos de tareas y su tecnología correspondiente, la tecnología en torno a ambos tipos de tarea es la misma. De igual manera sucedió en el libro de referencia de Costa Rica. Entonces, al analizar el criterio  $C\theta_4$  se observó que en ambos libros la tecnología identificada

permite producir nuevas técnicas capaces de ampliar los tipos de tareas, pero las evidencias de este criterio se identificaron en secciones posteriores a las que fueron analizadas.

Respecto al criterio  $C\theta$ , no se identificaron actividades, en ambos libros, en las que se emplee la tecnología para discernir cuál técnica es más confiable para llevar a cabo una tarea, sin embargo, esta tecnología sí permite hacer dicha comparación, en algún caso que se solicitara, por lo tanto, el criterio se cumple.

### Conclusiones

Al describir la actividad matemática entorno a la graficación de funciones propuesta en los libros de texto: Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica (Swokowski y Cole, 2009) e Introducción a la Matemática Formal desde las Funciones (Arias y Barrantes, 2010). Se determinó que ambos textos contienen solo dos tipos de tareas inversas entre sí:

- **T1:** Trazar la gráfica de una función.
- **T2:** Dada la gráfica de una función determinar algunas de sus características.

En el caso del libro utilizado en Honduras, la gama de técnicas para el primer tipo de tareas es amplia y detallada. Las técnicas que plantea el libro de texto para **T1** se describen como una secuencia de pasos a seguir; mientras que, para **T2** no se describe una técnica específica.

En contraste, el texto costarricense no explicita la técnica. No obstante, el lugar en el libro de texto en el que se desarrolla el ejemplo permite suponer, en la mayoría de los casos, la técnica a implementar. Esto revela la técnica, implícita en el libro, como una *autotecnología*.

Por lo que, se tiene una diferencia notable entre ambos libros, relacionada con la forma en que los autores desarrollan las técnicas, en el caso de Honduras las técnicas se elaboran efectivamente. Caso contrario en Costa Rica, donde se deja a criterio del lector la construcción de un gran porcentaje de las técnicas.

En las organizaciones matemáticas detectadas en ambos textos, el bloque tecnológico-teórico converge a la teoría de funciones. Sin embargo, se excluye el componente teórico que proviene de la Geometría al abortar la técnica vinculada con transformaciones de gráficas de funciones. Los autores presentan las transformaciones de modo que el sujeto de la institución, a la cual va dirigido el texto, les dará una significación desde la cotidianidad de su uso. Desde esta perspectiva, por ejemplo, el estudiante asociará una traslación con un movimiento en alguna dirección. Por lo que, tales interpretaciones comunes, que no son exclusivos de la Matemática, también forman parte del bloque tecnológico-teórico.

Entonces, la organización matemática en torno a la técnica (relacionada con las transformaciones de gráficas) presenta un bloque tecnológico-teórico impactado por las condiciones institucionales que excluyen las transformaciones de curvas como un saber del pasado didáctico de los sujetos de dicha institución.

Este impacto se reconoce al mostrar como definición, en qué “consiste” una cierta gráfica que involucra a otra función dada, y no propiamente, la definición de una operación, o transformación, definida en  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ .

Se concluye que las tecnologías se elaboran efectivamente para justificar cada técnica, y además son parecidas a las formas propias en Matemáticas; excepto el caso de aquellas técnicas cuyas tecnologías provienen de ámbitos como la Geometría. Además, en ninguno de los libros se encontraron actividades explícitas que permitan la justificación de las técnicas; es decir, que las tecnologías solamente se presentan en el libro, pero no hay cuestionamiento de ellas, ni actividades que soliciten al lector justificar un proceder.

### Referencias Bibliográficas

- Araya, A.** (2017). Elementos de Teoría Didáctica francesa: herramientas para la comprensión de la actividad matemática. En Flores, J. (Cord.). *Perspectivas Didácticas para la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas: una propuesta para mejorar la micro-planificación metodológica y temática*. Nicaragua: Sociedad Nicaragüense de Jóvenes Escritores.
- Arias, F., y Barrantes, H.** (2010). *Introducción a la matemática formal desde las funciones*. Universidad de Costa Rica.
- Bosch, M.** (1994). *La dimensión ostensiva de la actividad matemática* [Tesis doctoral, Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Barcelona].
- Bosch, M., y Chevallard, Y.** (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 19(1), 77-124. <https://revue-rdm.com/1999/la-sensibilite-de-l-activite/>
- Chevallard, Y.** (1999). El análisis de las prácticas docentes en la Teoría Antropológico de lo Didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266. [https://www.researchgate.net/publication/237274102\\_El\\_analisis\\_de\\_las\\_practicas\\_docentes\\_en\\_la\\_teor%C3%ADa\\_antropol%C3%B3gica\\_de\\_lo\\_did%C3%A1ctico1/download](https://www.researchgate.net/publication/237274102_El_analisis_de_las_practicas_docentes_en_la_teor%C3%ADa_antropol%C3%B3gica_de_lo_did%C3%A1ctico1/download)
- Durán, M.** (2012). El estudio de casos en la investigación cualitativa. *Revista Nacional de Administración*, 3(1), 121 – 134. <https://doi.org/g7z4>
- Fonseca, C.** (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria*. [Tesis Doctoral, Universidad de Vigo]. [http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/07/TESIS\\_\\_en\\_\\_PDF.pdf](http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/07/TESIS__en__PDF.pdf)
- Font, V.** (2001). Reflexiones didácticas desde y para el aula. *Revista EMA*, 6(2), 180-200. [http://www.pagvf.esy.es/index\\_archivos/\(04\)RD.pdf](http://www.pagvf.esy.es/index_archivos/(04)RD.pdf)

- Gascón, J.** (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(1), 7 – 34.
- Goetz, J. y LeCompte, M.** (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Morata.
- Manning, G., Segura, N. y Ventura, R.** (2019). *Análisis de una transposición didáctica del saber transformaciones de gráficas de funciones en el plano en la secundaria costarricense. Estudio de casos*. Memoria para optar por el grado de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática. Universidad de Costa Rica.
- Minet, N.** (2008). Un parcours d'étude et de recherche sur les fonctions en classe de 2<sup>nd</sup>. *Irem de Poitiers*, 104. [https://www.univ-irem.fr/corfem/Actes\\_2008\\_07.pdf](https://www.univ-irem.fr/corfem/Actes_2008_07.pdf)
- Swokoswky, E.** (2009). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. (J. Romo, Trad.). Cengage Learning.